

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. Determinați numerele reale a, b, c din egalitatea:

$$\sqrt[3]{a-2012} + \sqrt[3]{b+2013} + \sqrt[3]{c-2014} = \frac{a+b+c-1965}{8}$$

Prof. Gabriela Sascău, Rădăuți

Soluție: Notăm: $x = \sqrt[3]{a-2012}$, $y = \sqrt[3]{b+2013}$, $z = \sqrt[3]{c-2014}$, de unde obținem: $a = x^3 + 2012$, $b = y^3 - 2013$, $c = z^3 + 2014$. Egalitatea devine: $x + y + z = \frac{x^3 + y^3 + z^3 + 2013 - 1965}{8}$, de unde $x^3 + y^3 + z^3 + 48 = 8x + 8y + 8z$. Avem: $(x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0$, deci $x = y = z = 4$, iar $a = 2028, b = -1997, c = 2030$.

Barem:

Notăm: $x = \sqrt[3]{a-2012}$, $y = \sqrt[3]{b+2013}$, $z = \sqrt[3]{c-2014}$, de unde obținem: $a = x^3 + 2012$, $b = y^3 - 2013$, $c = z^3 + 2014$.	2p
Egalitatea devine: $x + y + z = \frac{x^3 + y^3 + z^3 + 2013 - 1965}{8}$, de unde $x^3 + y^3 + z^3 + 48 = 8x + 8y + 8z$	2p
$(x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0$	1p
$x = y = z = 4$	1p
$a = 2028, b = -1997, c = 2030$	1p

1. a) (2p) Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}$, pentru orice numere reale strict pozitive a, b .

b) (5p) Arătați că: $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq 2$, oricare ar fi numerele reale strict pozitive x, y, z, t .

Gazeta Matematica Nr.5/2010

Soluție: a) Inegalitatea este echivalentă cu $a+b \geq 2\sqrt{a \cdot b}$, ceea ce este adevărat, deoarece este echivalentă cu: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

b) Folosind inegalitatea de la punctul a) pentru $a = \frac{y+z+t}{x}$ și $b = 1$, avem:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{y+z+t}{x} \cdot 1}} \geq \frac{2}{\frac{y+z+t}{x} + 1} \quad \text{echivalentă cu:} \quad \sqrt{\frac{x}{y+z+t}} \geq \frac{2x}{x+y+z+t} \quad \text{Analog,}$$

$$\sqrt{\frac{y}{z+t+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z+t}, \quad \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z+t}, \quad \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2t}{x+y+z+t}.$$

Prin adunarea ultimelor patru inegalități obținem: $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2(x+y+z+t)}{x+y+z+t}$, de unde inegalitatea cerută.

Barem:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $a+b \geq 2\sqrt{a \cdot b}$, ceea ce este adevărat, deoarece este echivalentă cu: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.	2p
--	----

b) Folosind inegalitatea de la punctul a) pentru $a = \frac{y+z+t}{x}$ și $b = 1$, avem:	2p
$\frac{1}{\sqrt{\frac{y+z+t}{x} + 1}} \geq \frac{2}{\frac{y+z+t}{x} + 1}$	
$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} \geq \frac{2x}{x+y+z+t}, \quad \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z+t}, \quad \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z+t},$ $\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2t}{x+y+z+t}$	1p
$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2(x+y+z+t)}{x+y+z+t}$	1p
$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq 2$	1p

3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral cu latura de $4a$ cm și înălțimea $AA' = 3a$ cm. Se notează cu D și E mijloacele muchiilor $[A'C']$, respectiv $[A'B']$. Să se determine măsura unghiului format de dreapta AA' cu planul $(BCDE)$.

Prof. Stela Boghian, Suceava

Soluție: Fie $EE \cap AA' = \{F\}$.

$\triangle BB'E \equiv \triangle FA'E$ (C.U.) de unde rezultă: $[A'F] = [BE'] (= [AA'] = [CC'])$

$\triangle FA'D \equiv \triangle CC'D$ (C.C.) de unde rezultă $\triangle FDA' \equiv \triangle C'DC$, de unde $CD \cap AA' = \{F\}$.

Planul $(BCDE)$ coincide cu planul (BCF) . Fie M mijlocul lui $[BC]$.

Cum $FA \perp (ABC)$, $AM \perp BC$, $AM, BC \subset (ABC)$, conform th. celor 3 perpendiculare, avem: $FM \perp BC$.

Cum $FM \perp BC$, $AM \perp BC$, avem: $BC \perp (AFM)$.

Fie $AN \perp FM$, cum $AN \subset (AFM)$ și $BC \perp (AFM)$, avem: $BC \perp AN$.

Din $AN \perp FM$ și $BC \perp AN$ rezultă $AN \perp (BCF)$, deci $pr_{(BCF)} AA' = FM$, iar măsura unghiului cerut este

$m(\angle AFM)$. În $\triangle AFM$, dreptunghic în A , avem: $tg(\angle AFM) = \frac{AM}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $m(\angle AFM) = 30^\circ$.

Barem:

Fie $EE \cap AA' = \{F\}$.	1p
$\triangle BB'E \equiv \triangle FA'E$ (C.U.) de unde rezultă: $[A'F] = [BE'] (= [AA'] = [CC'])$	
$\triangle FA'D \equiv \triangle CC'D$ (C.C.) de unde rezultă $\triangle FDA' \equiv \triangle C'DC$, de unde $CD \cap AA' = \{F\}$.	
Planul $(BCDE)$ coincide cu planul (BCF) . Fie M mijlocul lui $[BC]$.	1p
Cum $FA \perp (ABC)$, $AM \perp BC$, $AM, BC \subset (ABC)$, conform th. celor 3 perpendiculare, avem: $FM \perp BC$.	
Cum $FM \perp BC$, $AM \perp BC$, avem: $BC \perp (AFM)$.	1p
Fie $AN \perp FM$, cum $AN \subset (AFM)$ și $BC \perp (AFM)$, avem: $BC \perp AN$.	1p
Din $AN \perp FM$ și $BC \perp AN$ rezultă $AN \perp (BCF)$, deci $pr_{(BCF)} AA' = FM$, iar măsura unghiului cerut este $m(\angle AFM)$.	1p
Calculează $AF = 4a, AM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.	1p
În $\triangle AFM$, dreptunghic în A , avem: $tg(\angle AFM) = \frac{AM}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $m(\angle AFM) = 30^\circ$.	1p

4. Pătratele ABCD și ABMN sunt situate în plane perpendiculare. Calculați măsura unghiului diedru format de planele (MAD) și (MND).

Prof. Șlincu Gabriela, Suceava

Soluție: Cum $AB \perp AD$ și $AB \perp AN$ avem $AB \perp (NAD)$, dar $AB \parallel MN$, deci $MN \perp (NAD)$.

Fie E mijlocul lui [ND]. Cum $AB \subset (NAD)$ rezultă $MN \perp AE$, dar și $ND \perp AE$ (mediană în triunghi isoscel), deci $AE \perp (MND)$. Fie $EF \perp MD$, cum $EF, MD \subset (MND)$, conform teoremei celor trei perpendiculare, avem: $AF \perp MD$. Muchia unghiului diedru este MD, deci măsura unghiului diedru este

$m(\angle EFA)$. În $\triangle AEF$ dreptunghic în E: $\sin(\angle EFA) = \frac{AE}{AF}$. În $\triangle AND$ dreptunghic în A: $AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, unde a este latura pătratului. Cum $AD \perp (NAB)$, iar $AM \subset (NAB)$, triunghiul $\triangle MAD$ este dreptunghic în A și $AF = \frac{MA \cdot AD}{MD} = \frac{a\sqrt{6}}{8}$. Deci, $\sin(\angle EFA) = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $m(\angle EFA) = 60^\circ$.

Barem:

Cum $AB \perp AD$ și $AB \perp AN$ avem $AB \perp (NAD)$, dar $AB \parallel MN$, deci $MN \perp (NAD)$. Fie E mijlocul lui [ND]. Cum $AB \subset (NAD)$ rezultă $MN \perp AE$, dar și $ND \perp AE$ (mediană în triunghi isoscel), deci $AE \perp (MND)$	2p
Fie $EF \perp MD$, cum $EF, MD \subset (MND)$, conform teoremei celor trei perpendiculare, avem: $AF \perp MD$.	1p
Muchia unghiului diedru este MD, iar $EF \perp MD$, $AF \perp MD$, deci măsura unghiului diedru este $m(\angle EFA)$. În $\triangle AEF$ dreptunghic în E: $\sin(\angle EFA) = \frac{AE}{AF}$.	1p
În $\triangle AND$ dreptunghic în A: $AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, unde a este latura pătratului. Cum $AD \perp (NAB)$, iar $AM \subset (NAB)$, triunghiul $\triangle MAD$ este dreptunghic în A și $AF = \frac{MA \cdot AD}{MD} = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.	2p
$\sin(\angle EFA) = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $m(\angle EFA) = 60^\circ$.	1p