

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\sum_{k=1}^n \left[\sqrt{k^2 - k + 1} \right] = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

Subiectul 2. Fie ABC un triunghi și punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ astfel încât:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

Demonstrați că segmentele AA_1 , BB_1 , CC_1 pot fi laturile unui triunghi.

Subiectul 3. Fie P punctul de intersecție a coardelor perpendiculare AB și CD duse într-un cerc de centru O . Demonstrați că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Subiectul 4. Determinați pătratele perfecte de forma:

$$(n^2 + 9)(n^2 + 16)(n^2 + 25),$$

unde $n \in \mathbb{N}$.

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.