

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26.02.2017
BAREM

CLASA a V-a

Subiectul I

Pe o masă sunt așezate două foi, rupte la întâmplare dintr-o carte. Numărul scris pe pagina vizibilă a primei foi este x și acesta este mai mare decât y , numărul scris pe pagina vizibilă a foii a doua. Demonstrați că, după întoarcerea celor două foi pe partea cealaltă, numărul scris pe prima foaie este mai mare decât cel scris pe a doua foaie.

(Trofin Ovidiu)

Dacă x este scris pe pagina vizibilă a primei foi, atunci pe cealaltă parte este numărul $x-1$ sau $x+1$. Analog, pe a doua foaie, pe verso apare $y-1$ sau $y+1$**1p**

Cazul 1: dacă $x > y$, atunci este evident că $x + 1 > y + 1$ **2p**

Cazul 2: dacă $x > y$, atunci este evident că $x - 1 > y - 1$ **1p**

Cazul 3: dacă $x > y$, atunci rezultă că $x + 1 > x - 1 > y - 1$ **1p**

Cazul 4: dacă numerele ce trebuie să fie comparate sunt $x-1$ și $y+1$

Cum mulțimile $\{x, x - 1\}$ și $\{y, y + 1\}$ sunt disjuncte, rezultă că $x = y + k$, unde $k \geq 3$, de unde $x - 1 = y + k - 1 > y + 1$**2p**

Subiectul II

Pentru numărul natural nenul n se consideră:

$$a = [(1 + 2 + 3 + \dots + 20) : 21 - 3]^{n-1},$$

$$b = 3^n \cdot \{(3^2 - 2^3)^{2017} + 2^{2017} \cdot [3^5 - 9 \cdot (2^{2016} : 4^{1005} - 37)]\} \text{ și}$$

$$c = (3952 : 19 + 13357 : 19 + 1710 : 19) : 7 - 139.$$

Comparați numerele a , b , c , argumentând rezultatul.

(Trandafir Marius)

$$a = \left[\left(\frac{20 \cdot 21}{2} \right) : 21 - 3 \right]^{n-1} = 7^{n-1} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$b = 3^n \cdot \{1^{2017} + 2^{2017} \cdot [3^5 - 9 \cdot (2^6 - 37)]\} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$b = 3^n \cdot \{1 + 2^{2017} \cdot 0\} = 3^n \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$c = (19019 : 19) : 7 - 139 = 143 - 139 = 4 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Cazul } n=1: a=1, b=3, c=4 \text{ deci } a < b < c \dots\dots\dots \mathbf{0,5p}$$

$$\text{Cazul } n=2: a=7, b=9, c=4 \text{ deci } c < a < b \dots\dots\dots \mathbf{0,5p}$$

$$\text{Cazul } n \geq 3: a=49 \cdot 7^{n-3}, b=27 \cdot 3^{n-3}, c=4 \text{ deci } c < b < a \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Subiectul III

Aflați numărul $\overline{abc}$ știind că, prin împărțirea acestuia la 3, se obțin câtul $\overline{bc}$ și restul nenul.

(Căzănel Gheorghiță)

$$\overline{abc} = 3\overline{bc} + r, \quad 0 < r < 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{abc} = 3\overline{bc} + r \Leftrightarrow 100a = 2\overline{bc} + r \dots\dots\dots 1p$$

Dacă $r = 1 \Rightarrow 100a = 2\overline{bc} + 1$, imposibil deoarece membrul stâng este par, iar membrul drept este impar $\dots\dots\dots 1p$

$$\text{Dacă } r = 2 \Rightarrow 50a = \overline{bc} + 1, \quad a \neq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 1 \Rightarrow 50 = \overline{bc} + 1 \Rightarrow \overline{bc} = 49 \Rightarrow \overline{abc} = 149 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 2 \Rightarrow 100 = \overline{bc} + 1 \Rightarrow \overline{bc} = 99 \Rightarrow \overline{abc} = 299 \dots\dots\dots 1p$$

$$a \geq 3 \text{ este imposibil. Deci, } \overline{abc} \in \{149, 299\} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul IV

Spunem că o mulțime de numere A are proprietatea p dacă elementele sale pot fi împărțite în două grupe, fiecare cu cel puțin trei elemente, astfel încât, în fiecare grupă, un element este egal cu produsul celorlalte.

- Știind că mulțimea $A = \{a, 4, 8, 27, 64, 81, 2187\}$ are proprietatea p , aflați numărul natural a .
- Dacă o mulțime M are proprietatea p , arătați că produsul elementelor mulțimii M este pătrat perfect.

(Trofin Ovidiu)

a. Cum $\{4, 8, 27, 64, 81, 2187\} = \{2^2, 2^3, 2^6, 3^3, 3^4, 3^7\}$, rezultă că o grupă va conține puteri ale lui 2 iar cealaltă puteri ale lui 3 $\dots\dots\dots 2p$

Cum $3^3 \cdot 3^4 = 3^7$ și $2^2 \cdot 2^3 \neq 2^6$ rezultă că a trebuie să fie o putere a lui 2 $\dots\dots\dots 1p$

Deci $a \in \{2, 2048\}$ $\dots\dots\dots 1p$

b. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ cu produsul a_k , elementele primei grupe.

Fie $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ cu produsul b_n , elementele grupei a doua $\dots\dots\dots 1p$

Produsul elementelor mulțimii M este $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot a_k) \cdot (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot b_n) = (a_k)^2 \cdot (b_n)^2 = (a_k \cdot b_n)^2$ care este pătrat perfect $\dots\dots\dots 2p$