OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

16 februarie 2013

CLASA a X-a

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat. Să se determine, după toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reale pozitive, valoarea minimă a sumei $S = \left[\frac{a_1 + a_2}{a_3}\right] + \left[\frac{a_2 + a_3}{a_4}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n + a_1}{a_2}\right]$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie impară şi crescătoare astfel încât $\left|f(x)\right| \geq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Demonstraţi că $f^3(x) + f^3(y) \geq xy\left(f(x) + f(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y \geq 0$.

3. Se consideră numerele complexe z_1 şi z_2, $z_2 \neq 0$. Ştiind că $Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$, să se studieze monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|z_1|^x + |z_2|^x}{|z_1 - z_2|^x}$.

4. Fie triunghiul ΔABC. În raport cu un reper cartezian cu originea în centrul cercului circumscris ΔABC, vârfurile A, B, C au afixele a, b respectiv c. Dacă ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are o rădăcină de modul unu, demonstraţi că ΔABC este isoscel.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.