

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2017. január 28.

XI. OSZTÁLY

- 1.) Igazold, hogy az $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2016 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & \dots & 2016 \end{pmatrix} \cdot x = e, x \in S_{2016}$ egyenletnek legalább

2017 megoldása van, ahol $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2016 \\ 1 & 2 & \dots & 2016 \end{pmatrix}$.

- 2.) Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix.

a) Számítsd ki az $A^n, n \in \mathbb{N}^*$ mátrixot!

b) Igazold, hogy léteznek az $X, Y, Z \in M_3(\mathbb{R}_+)$ nemnulla és különböző mátrixok úgy, hogy teljesüljön az $A = X^{2017} + Y^{2017} + Z^{2017}$ összefüggés!

- 3.) Adott az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2^n, \forall n > 1$

a) Határozd meg a sorozat általános tagját!

b) Mutasd ki, hogy a sorozatnak nincs olyan három egymásután következő tagja, amely számtani haladványt alkot!

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n + k^n}, k \in \mathbb{N}$ határértékeket!

- 4.) Adott az $a_n = \left(\sum_{k=1}^{2016} 2016^{\frac{k-n}{n}} \right)^n$ képlettel értelmezett $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat.

Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2016}^{2017}$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.