



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

17 februarie 2019

Clasa a X-a

1. Determinați numerele complexe z cu proprietățile:

$|z| = 1$ și $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$, apoi calculați suma valorilor găsite precum și aria poligonului convex având drept vârfuri imaginile lui z găsite.

2. Se consideră funcția $f: [3, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \log_3^2 x - \log_3 x$. Să se demonstreze că f este inversabilă și să se determine toate numerele naturale n , pentru care $f^{-1}(n) \in \{3m | m \in \mathbb{N}^*\}$.

3. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale:

$$\log_{[x]} x + \log_{[x^2]} x + \log_{[x^3]} x + \log_{[x^4]} x - 2 = \frac{1}{12},$$

unde $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a numărului real α .

b) Fie $a, b, c \in (0, 1)$, $0 < a \leq b \leq c < 1$. Comparați numerele:

$$A = \log_b a + \log_c b + \log_a c \quad \text{și} \quad B = \log_a b + \log_b c + \log_c a.$$

4. Fie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_n} \leq a \quad \text{și} \quad a^{x_k} + a^{x_j} < 1, \forall k \neq j.$$

Să se arate că: $(1 - a^{x_1})(1 - a^{x_2}) \dots (1 - a^{x_n}) \geq 1 - a$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.