

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 25 februarie 2018

Clasa a VIII – a

VARIANTA 1

VIII

SUBIECTE:

1. a) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ordonați crescător numerele: $x = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, $y = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ și $z = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$. (2p)

- b) Folosind eventual rezultatul de la punctul a), demonstrați că partea întreagă a numărului α este mai mică decât 90, unde $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2010}}$. (5p)

2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, demonstrați următoarea inegalitate:

$$(a, b)^2 + (b, c)^2 + (c, a)^2 + [a, b]^2 + [b, c]^2 + [c, a]^2 \geq \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{2},$$

unde prin (x, y) , respectiv $[x, y]$ înțelegem cel mai mare divizor comun al numerelor x și y , respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y . (7p)

3. Se dă cubul $ABCDMNPQ$, în care O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD , respectiv BCD .

- a) Arătați că $MC \perp (BDP)$; (2p)
b) Știind că $O_1O_2 = 2$ cm, calculați lungimea muchiei cubului; (2p)
c) Știind că muchia cubului este de $2 + \sqrt{2}$ cm, $E \in [AD]$, $F \in [CD]$, astfel încât $\frac{AE}{ED} = \frac{CF}{FD} = \sqrt{2}$, determinați măsura unghiului format de planele (MO_2F) și (PO_1E) . (3p)

4. Pe planul trapezului isoscel ortodiagonal, unde $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm, $CD = 6$ cm, se ridică perpendiculara OP , $(BD \cap AC = \{O\})$, $OP = 4$ cm. Aflați:

- a) Distanța de la punctul P la dreapta DM , ($DM \perp AB$). (4p)
b) Distanța de la O la planul (PDA) . (3p)

Prin muncă și stăruință vei ajunge la dorință. (Proverb românesc)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje cuprinse între 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.