

CLASA A X - A - BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_a 10 + \log_a 6 + \log_a 15 \quad (2 \text{ puncte})$$

$$= \log_a 900 \quad (2 \text{ puncte}) \quad \Bigg| \quad = 2 \log_a 30 \quad (1 \text{ punct}$$

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_5 a} = \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5$$
$$= \log_a 30 \quad (2 \text{ puncte})$$

SUBIECTUL 2

$$f \text{ injectivă} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$f \text{ surjectivă} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x}) \quad (2 \text{ puncte})$$

$$f(1) = 1 \quad (1 \text{ punct})$$

SUBIECTUL 3

2 puncte

Soluție. Cum $y \geq 1, z \geq 1$, rezultă că $\frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2^z} \leq \frac{1}{2}$, deci $\frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} \leq 1$.

Obținem $2^y + 2^z \leq 2^{y+z}$, de unde $\log_2(2^y + 2^z) \leq y + z$ și celelalte. Atunci

$$\sum x \log_2(2^y + 2^z) \leq \sum x(y + z) = 2 \sum xy \leq 2 \sum x^2.$$

3 puncte

SUBIECTUL 4

Soluție. Fie $r = |z_1| = |z_2| = |z_3|$. Avem $\bar{a} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{z_1 - z_2} = \frac{\frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2}}{\frac{z_1}{r^2} - \frac{z_2}{r^2}} = \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} =$

3 puncte

$= -a$, deci a, b, c sunt numere pur imaginare. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ cu $a = ix, b = iy$

$c = iz$. Atunci $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+ix}{-1+ix}, \frac{z_2}{z_3} = \frac{1+iy}{-1+iy}, \frac{z_3}{z_1} = \frac{1+iz}{-1+iz}$, de unde, prin înmulțire
2 puncte
obținem $(-1+ix)(-1+iy)(-1+iz) = (1+ix)(1+iy)(1+iz)$ și apoi $xy + yz + zx = 1$

Pe de altă parte, din $a^2 + b^2 + c^2 = -1$ rezultă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, adică
 $\sum (x-y)^2 = 0$ și deci $x = y = z$. Atunci $a = b = c$, ceea ce trebuia demonstrat.

2 puncte