

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A XI-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 > 0$ și $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \ln x_{n+1}, n \geq 1$. Să se

calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.

Gazeta Matematică

Soluție:

$$x_n = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k = \ln x_{n+1} - \ln x_n \Rightarrow x_{n+1} = x_n e^{x_n} \dots\dots\dots 3p$$

Obținem că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \dots\dots\dots 2p$

$$\text{Avem } \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}} = e \dots\dots\dots 2p$$

2. Rezolvați în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 - 3X = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ și din } X^4 - 3X^2 = X \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3p$$

$$X^3 - 3X = \begin{pmatrix} a^3 - 3a & 3a^2b - 3b \\ 0 & a^3 - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 4p$$

3. Considerăm șirul de numere reale $(u_n)_{n \geq 0}$ definit prin $u_0 = \frac{11}{4}$ și $u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}, \forall n \geq 0$.

Arătați că șirul $(u_n)_{n \geq 0}$ este convergent și determinați limita sa.

Soluție:

Pentru ca șirul să fie corect definit trebuie ca $u_n \geq \frac{7}{4} \Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow u_n \geq \frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$

Dacă șirul ar avea limita L , atunci trecând la limită în relația de recurență am obține $L \in \{2, 4\}$,
deci $L = 4 \dots\dots\dots 1p$

Prin inducție matematică se demonstrează că $(u_n)_{n \geq 0}$ este mărginit și strict crescător.....4p

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x \\ 0 & x & x+1 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculați A^n , pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Valentin Florin Damian, Brăila

Soluție:

$$A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x \\ 0 & x & x+1 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{x} & 1 \\ 0 & 1 & 1+\frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notăm $1 + \frac{1}{x} = a$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică este: $\det(B - \lambda I_3) = 0$, iar polinomul

caracteristic devine $f_B(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + a^2 \dots\dots\dots 2p$

$f_B(\lambda) = O_3 \Rightarrow -B^3 + 3B^2 - 2B + a^2 I_3 = O_3 \Rightarrow B^3 = 3B^2 - 2B + a^2 I_3 \dots\dots\dots 1p$

Fie $B^n = x_n \cdot B^2 + y_n \cdot B + z_n \cdot I_3 \mid \cdot B \Rightarrow B^{n+1} = x_n \cdot B^3 + y_n \cdot B^2 + z_n \cdot B =$

$= x_n(3B^2 - 2B + a^2 I_3) + y_n B^2 + z_n B = B^2(3x_n + y_n) + B(z_n - 2x_n) + a^2 x_n I_3 \dots\dots\dots 2p$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = z_n - 2x_n \\ z_{n+1} = a^2 x_n \end{cases} \Rightarrow y_{n+1} = z_n - 2x_n = a^2 x_{n-1} - 2x_n \Rightarrow$$

$$z_{n+1} = a^2 x_n \Rightarrow z_n = a^2 x_{n-1}$$

$y_n = a^2 x_{n-2} - 2x_{n-1}, \quad x_{n+1} = 3x_n + y_n = 3x_n - 2x_{n-1} + a^2 x_{n-2}.$

Fiind o recurență liniară de ordinul 3, obținem soluția:

$x_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n$, unde r_1, r_2, r_3 sunt soluțiile ecuației caracteristice.

$x^3 - 3x^2 + 2x - a^2 = 0$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt constante ce se determină din condițiile inițiale.....2p