

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013****CLASA a IX - a**

1. a) Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Să se calculeze:

$$f = \left\{ n + \sqrt{n^2 - 1} \right\} + \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \right\},$$

unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Să se arate că:

$$(|a| + |b|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} \right) + (|a| + |c|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|c|} \right) + (|c| + |b|) \left(\frac{1}{|c|} + \frac{1}{|b|} \right) \geq 12.$$

Soluție:

$$1. a) f = \{n + \sqrt{n^2 - 1}\} + \{n - \sqrt{n^2 - 1}\} \quad 1p$$

$$\lceil n + \sqrt{n^2 - 1} \rceil = 2n - 1, \text{ oricare ar fi } n \geq 2 \quad 1p$$

$$\lfloor n - \sqrt{n^2 - 1} \rfloor = 0, \text{ oricare ar fi } n \geq 2 \quad 1p$$

$$f = n + \sqrt{n^2 - 1} - 2n + 1 + n - \sqrt{n^2 - 1} = 1 \quad 1p$$

$$b) (|a| + |b|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} \right) \geq 2\sqrt{|a| \cdot |b|} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|b|}} = 4 \quad 1p$$

Analog pentru celelalte relații.

Se sumează și se obține

$$(|a| + |b|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} \right) + (|a| + |c|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|c|} \right) + (|c| + |b|) \left(\frac{1}{|c|} + \frac{1}{|b|} \right) \geq 12. \quad 2p$$

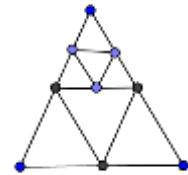
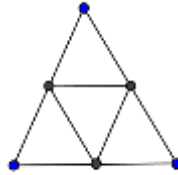
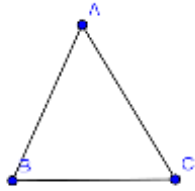
2. Să se demonstreze că oricare triunghi echilateral poate fi partiționat în $3n + 1$ triunghiuri echilaterale, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

Prin metoda inducției matematice

a) Etapa de verificare

1p



$P(0)$: $3 \cdot 0 + 1$ triungh.

$p(1)$: $3 \cdot 1 + 1$ triungh.

$p(2)$: $3 \cdot 2 + 1$ triungh.

b) $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

6p

$p(k)$: presupunem că am împărți triunghiul echilateral în $3 \cdot k + 1$ triunghiuri echilaterale și

$p(k+1)$: demonstrăm că putem împărți triunghiul în $3 \cdot (k + 1) + 1$ triunghiuri echilaterale .

Unul din cele $3 \cdot k + 1$ triunghiuri echilaterale îl vom împărți în 4 triunghiuri echilat. Vom obține $3 \cdot k + 1 - 1 + 4 = 3 \cdot (k + 1) + 1$.

3. Determinați numărul $n \in \mathbb{N}$, știind că numărul $4^{2013} - 15 \cdot 4^{2010} + 2^n$ este pătrat perfect.

Soluție:

$$4^{2013} - 15 \cdot 4^{2010} + 2^n = 4^{2010} (64 - 15) + 2^n = 49 \cdot 4^{2010} + 2^n. \quad 2p$$

Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $49 \cdot 4^{2010} + 2^n = k^2$. De aici rezultă:

$$2^n = k^2 - 49 \cdot 4^{2010} = (k + 7 \cdot 4^{1005}) \cdot (k - 7 \cdot 4^{1005}). \quad 1p$$

Deci există $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ astfel încât să avem:

$$\begin{cases} k + 7 \cdot 4^{1005} = 2^p \\ k - 7 \cdot 4^{1005} = 2^{n-p}, \quad p > n - p \end{cases} \quad 2p$$

Scăzând egalitățile, rezultă $14 \cdot 4^{1005} = 2^{n-p} (2^{2p-n} - 1)$ adică $7 \cdot 2^{2011} = 2^{n-p} \cdot (2^{2p-n} - 1)$ de unde rezultă

$$\begin{cases} n - p = 2011 \\ 2p - n = 3 \end{cases} \quad \text{deci } n = 4025. \quad 2p$$

4. În triunghiul ABC, fie P, Q și R punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, AC și respectiv AB.

a) *Arătați că AP, BQ și CR sunt concurente.*

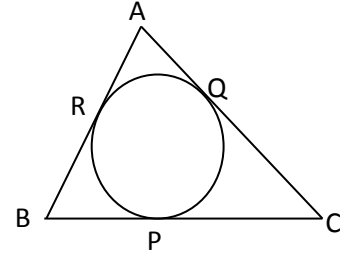
b) *Arătați că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \cdot \overrightarrow{BC} + y \cdot \overrightarrow{CA} + z \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ atunci $x = y = z$.*

c) *Arătați că dacă $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Soluție:

Notând cu a, b, c laturile triunghiului ABC avem

$$\begin{cases} AR = AQ = p - a \\ BP = BR = p - b \\ CP = CQ = p - c \end{cases}$$



$$\text{Cum } \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-c}{p-a} = 1$$

rezultă (T. Ceva) că AP , BQ și CR sunt concurente.

3p

$$b) \quad x \cdot \overrightarrow{BC} + y \cdot \overrightarrow{CA} + z \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow x \cdot \overrightarrow{BC} + y \cdot \overrightarrow{CA} + z \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}(z - x) = \overrightarrow{AC}(y - z).$$

Dacă egalitățile $z - x = 0$ și $y - z = 0$ nu ar avea loc, ar rezultă că vectorii $\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari (fals). Deci $x = y = z$.

2p

$$c) \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{p-b}{a} \cdot \overrightarrow{BC}. \text{ Analog}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \frac{p-c}{b} \cdot \overrightarrow{CA} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} + \frac{p-a}{c} \cdot \overrightarrow{AB}. \text{ Adunând egalitățile, obținem:}$$

$$\frac{p-b}{a} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{p-c}{b} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{p-a}{c} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}. \text{ Aplicând b) rezultă}$$

$$\frac{p-b}{a} = \frac{p-c}{b} = \frac{p-a}{c} = \frac{3p-a-b-c}{a+b+c} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c.$$

2p