

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –

CLASA A XI-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = O_3$. Să se arate că

$$a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31} \leq a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2.$$

2. Să se arate că funcția $f: \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = tg \frac{\pi}{2x}$ nu are limită în punctul $x_0 = 1$

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $tr(A) \neq 0$ și $det(A^2 + (detA + x)I_2) \geq 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

Arătați că $4det(A) \geq (trA)^2$.

4. Se dă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + x_n + 1}}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n$;

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n$.