

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024**

CLASA a XI -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu $A^3 = A^2$ și $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

Soluție:

Prin înmulțirea la stânga cu matricea A , egalitatea $A + B = I_n$ devine $A^2 + AB = A$

$$\Rightarrow AB = A - A^2.$$

Ridicând la pătrat această egalitate obținem: $(AB)^2 = (A - A^2)^2 = A^2 - 2A^3 + A^4$. (1)

$$\text{Dar } A^3 = A^2 \Rightarrow A^4 = A^3 \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $(AB)^2 = O_n$.

$$\text{Ca urmare, } I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB)(I_n + AB).$$

Rezultă că matricea $I_n + AB$ este inversabilă și inversa ei este $I_n - AB$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$A \cdot A + B = I_n \Rightarrow A^2 + AB = A \Rightarrow AB = A - A^2$	2p
$\left. \begin{array}{l} (AB)^2 = (A - A^2)^2 = A^2 - 2A^3 + A^4 \\ A^3 = A^2 \Rightarrow A^4 = A^3 \end{array} \right\} \Rightarrow (AB)^2 = O_n$	2p
$I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB)(I_n + AB)$	2p
matricea $I_n + AB$ este inversabilă și inversa ei este $I_n - AB$	1p

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(A+I_2) = \det(A - I_2)$ dacă și numai dacă $\text{Tr}(A)=0$.

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci $\det(A+I_2) = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix}$ și $\det(A - I_2) = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix}$

Relația din ipoteză se scrie $\begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix}$

Egalitatea este echivalentă cu $(a+1)(d+1) - bc = (a-1)(d-1) - bc$, deci

$(a+1)(d+1) = (a-1)(d-1)$, ceea ce înseamnă că

$ad + a + d + 1 = ad - a - d + 1$

Relația anterioară este echivalentă cu $a + d = -a - d = -(a + d)$

Ceea ce se scrie $a + d = 0$

Deoarece $\text{Tr}(A) = a + d$ se obține că $\text{Tr}(A) = 0$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$\begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix}$	2p
$(a+1)(d+1) - bc = (a-1)(d-1) - bc$	2p
$a + d = -a - d$	2p
$\text{Tr}(A) = a + d$, rezultă că $\text{Tr}(A) = 0$	1p

3. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x-5} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt[3]{3-x}}$

Soluție:

Notăm cu $L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x-5} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt[3]{3-x}}$

Dacă $x \rightarrow 4$, atunci $x - 4 \rightarrow 0$ și $y = x - 4 \rightarrow 0$

Astfel, limita inițială limita se scrie $L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{y-1} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{1-y} + \sqrt[3]{-1-y}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-(1-y)^{\frac{1}{3}} + (1+y)^{\frac{1}{2}}}{(1-y)^{\frac{1}{2}} - (1+y)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - (1-y)^{\frac{1}{3}}}{y}}{\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}} - (1+y)^{\frac{1}{3}}}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - (1-y)^{\frac{1}{3}}}{(1-y)^{\frac{1}{2}} - (1+y)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - 1}{y} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{3}} - 1}{-y}}{\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}} - 1}{-y} - \frac{(1+y)^{\frac{1}{3}} - 1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - 1}{y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1-y)^{\frac{1}{3}} - 1}{-y}}{-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1-y)^{\frac{1}{2}} - 1}{-y} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{\frac{1}{3}} - 1}{y}} \end{aligned}$$

Prin aplicarea regulii lui l'Hospital se obține:

$$L = \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+y)^{-\frac{1}{2}}}{1} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}(1-y)^{-\frac{2}{3}}}{-1}}{-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{-1} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(1+y)^{-\frac{2}{3}}}{1}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = -1$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$x - 4 = y \rightarrow 0$ limita se scrie $L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{y-1} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{1-y} + \sqrt[3]{-1-y}}$	2p
$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-(1-y)^{\frac{1}{3}} + (1+y)^{\frac{1}{2}}}{(1-y)^{\frac{1}{2}} - (1+y)^{\frac{1}{3}}}$	2p
$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - 1}{y} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{3}} - 1}{-y}}{\frac{(1-y)^{\frac{1}{2}} - 1}{-y} - \frac{(1+y)^{\frac{1}{3}} - 1}{y}}$	2p
Finalizare $L = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = -1$	1p

4. Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit recurent prin $x_1 = a > 1$ și $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{1}{x_n^2} \right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la 1.

Soluție:

$$\text{Din } x_1 = a > 1, \text{ obținem } x_2 - 1 = \frac{1}{3} \left(2a + \frac{1}{a^2} \right) - 1 = \frac{2a^3 - 3a^2 + 1}{3a^2} = \frac{(a-1)^2(2a+1)}{3a^2} > 0$$

Presupunem $x_n > 1$. Rezultă în mod analog că

$$x_{n+1} - 1 = \frac{(x_n-1)^2(2x_n+1)}{3x_n^2} > 0$$

$\Rightarrow x_{n+1} > 1 \Rightarrow x_n > 1$, deci (x_n) este mărginit inferior de 1.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n^3+1}{3x_n^2} - x_n = \frac{2x_n^3+1-3x_n^3}{3x_n^2} = \frac{1-x_n^3}{3x_n^2} < 0 \text{ deci șirul } (x_n) \text{ este strict descrescător.}$$

Atunci șirul este convergent, deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \geq 1$

Trecând la limită în relația de recurență se obține $l = \frac{2l^3+1}{3l^2}$ adică $3l^3 = 2l^3 + 1$.

Ca urmare, $l = 1$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$x_2 - 1 = \frac{2a^3 - 3a^2 + 1}{3a^2} = \frac{(a-1)^2(2a+1)}{3a^2} > 0$	1p
$x_{n+1} - 1 = \frac{(x_n-1)^2(2x_n+1)}{3x_n^2} > 0 \Rightarrow (x_n) \text{ este mărginit inferior de 1}$	2p
$x_{n+1} - x_n = \frac{1-x_n^3}{3x_n^2} < 0 \text{ deci șirul } (x_n) \text{ este strict descrescător}$	2p
șirul este convergent, deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \geq 1$	1p
$l = \frac{2l^3+1}{3l^2}$, adică $l = 1$	1p