



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - SĂLAJ -11.02.2023

BAREM DE NOTARE

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) | AX = XA\}$.

a) Arătați că $X \in C(A)$ dacă și numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ecuația $X^n = A$ nu are soluții.

Rezolvare:

a) Fie $X = \begin{pmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ t & u & v \end{pmatrix} \in C(A)$.

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & m & 2m+n \\ 0 & q & 2q+r \\ 0 & t & 2t+u \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} q+2t & r+2u & s+2v \\ t & u & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1p

$$AX = XA \Rightarrow \begin{cases} q+2t = 0 \\ t = 0 \\ r+2u = m \\ u = q \\ s+2v = 2m+n \\ v = 2q+r \\ 2t+u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ u = 0 \\ q = 0 \\ m = r \\ v = r \\ n = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} m & n & p \\ 0 & m & n \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad 1p$$

Punem $m = a, n = b, p = c \Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$

$$\text{Invers: } AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b+2a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = XA \quad 1p$$

b) Presupunem că $\exists X \in M_3(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ astfel încât

$$X^n = A \Rightarrow \det(X^n) = \det A \Rightarrow (\det X)^n = 0 \Rightarrow \det X = 0 \quad 1p$$

$$\text{Avem } X^{n+1} = X^n X = AX$$

$$X^{n+1} = XX^n = XA$$

$$\Rightarrow AX = XA \Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad 1p$$

$$\text{Dar } \det X = a^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 1p$$

$$\text{Avem } X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X^n = O_3, \forall n \geq 3$$

$$\Rightarrow \text{ecuația } X^n = A \text{ nu are soluții.} \quad 1p$$

Subiectul 2

Arătați că determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} b^2 c^2 & a^2 c^2 & a^2 b^2 \\ b^2 + bc + c^2 & a^2 + ac + c^2 & a^2 + ab + b^2 \\ b + c & a + c & a + b \end{vmatrix}$ este divizibil prin $(ab + bc + ca)^2$.

Soluție:

$$\Delta = (C2 - C1 \text{ și } C3 - C1) = \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2(a-b)(a+b) & b^2(a-c)(a+c) \\ b^2 + bc + c^2 & (a-b)(a+b+c) & (a-c)(a+b+c) \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\Delta = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2(a+b) & b^2(a+c) \\ b^2 + bc + c^2 & (a+b+c) & (a+b+c) \\ b+c & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\Delta = (C3 - C2) =$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2(a+b) & (b-c)(ab+bc+ca) \\ b^2 + bc + c^2 & (a+b+c) & 0 \\ b+c & 1 & 0 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$= (a-b)(a-c)(b-c)(ab+bc+ca) \begin{vmatrix} b^2 + bc + c^2 & a+b+c \\ b+c & 1 \end{vmatrix} \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$= -(a-b)(a-c)(b-c)(ab+bc+ca)(ab+bc+ca) =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)^2, \text{ deci } \Delta \text{ divizibil cu } (ab+bc+ca)^2 \dots\dots 1 \text{ punct}$$

Subiectul 3

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin: $a_1 = \sqrt{2}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și $1 \leq a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Soluție:

$$a) \text{ Se calculează } a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 - 3a_n + 2}{3} = \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3} \dots\dots\dots 1p$$

Vom demonstra prin inducție matematică propoziția: $P(n): 1 \leq a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

I. $P(1): 1 \leq a_1 \leq 2$ adevărat

II. Presupunem $P(k): 1 \leq a_k \leq 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$ adevărată și demonstrăm că

$P(k+1): 1 \leq a_{k+1} \leq 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$ este adevărată.

$$1 \leq a_k \leq 2 \Rightarrow 1 \leq a_k^2 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq a_k^2 + 2 \leq 6 \Rightarrow 1 \leq \frac{a_k^2 + 2}{3} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq a_{k+1} \leq 2 \text{ adevărat}$$

$$\Rightarrow 1 \leq a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow a_n \in (1, 2), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3} = a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \text{șirul este monoton}$$

descrescător 1p

b) $1 \leq a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit și monoton descrescător, deci este convergent $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = l \in [1, 2]$ 1p

Trecând la limită $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2 + 2}{3} \Rightarrow l = \frac{l^2 + 2}{3}$ 1p

$\Rightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Rightarrow l \in \{1, 2\}$, șirul fiind descrescător $\Rightarrow l = 1$ 1p

Subiectul 4

Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x}{x^2} =$ 1p

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \frac{1 - \cos x}{x^2} =$ 1p

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$ 1p

Observație. Limita se poate calcula și folosind formula $\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{3x}{2} + \cos \left(-\frac{x}{2} \right) \right]$.

b) $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}.$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos nx} + \sqrt[n]{\cos nx} - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} =$ 1p

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{\cos nx} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n-1]{\cos (n-1)x}}{x^2} =$ 1p

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos nx}{x^2 \left(1 + \sqrt[n]{\cos nx} + \sqrt[n]{\cos^2 nx} + \dots + \sqrt[n]{\cos^{n-1} nx} \right)} + L_{n-1} =$

$= \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{nx}{2}}{\frac{n^2 x^2}{4}} \cdot \frac{n^2}{4} + L_{n-1} = \frac{n}{2} + L_{n-1}$ 1p



$$L_n = L_{n-1} + \frac{n}{2}, \quad \forall n \geq 2$$

$$L_2 = L_1 + \frac{2}{2}$$

$$L_3 = L_2 + \frac{3}{2}$$

...

$$L_n = L_{n-1} + \frac{n}{2}$$

Prin însumare obținem $L_n = L_1 + \frac{2+3+\dots+n}{2}$.

$$L_1 = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \text{ deci } L_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

1p