

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală - 15.02.2014

Clasa a VI-a

1) Fie $\overline{abc}$ un număr în baza 10 cu proprietatea că $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{bc}}{7}$.

a) Să se arate că $a = c$;

b) Să se determine toate numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea dată.

2) Fie fracția $F = \frac{2n+7}{5n+3}$, în care n este număr natural. Arătați că:

a) Dacă fracția este reductibilă, atunci $n \geq 11$;

b) Dacă $n_1, n_2, \dots, n_{2014}$ sunt valori ale lui n pentru care F este reductibilă, atunci suma $n_1 + n_2 + \dots + n_{2014}$ nu se divide cu 29.

GM 6-7-8/2013

3) Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului $\triangle ABC$ se consideră respectiv punctele M și N astfel încât $[BM] \equiv [CN]$ și $[BN] \equiv [CM]$. Se consideră $\{O\} = BN \cap CM$. Să se arate că:

a) $\triangle MON$ este isoscel;

b) (AO) este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

4) Fie $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ puncte coliniare, în această ordine, astfel ca $A_1A_2 = 1\text{cm}$, $A_2A_3 = 4\text{cm}$, $A_3A_4 = 7\text{cm}$ și așa mai departe. Notăm cu M mijlocul segmentului $[A_{20}A_{100}]$.

a) Să se determine lungimea segmentului $[A_1M]$;

b) Să se afle în care din segmentele $[A_kA_{k+1}]$ se află punctul M .

Propunător: profesor Cornel Noană, Colegiul Național Unirea Focșani

SUCCES!

NOTĂ:

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-14.02.2014

Clasa a VI-a

Soluții

1) a) $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{bc}}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{bc}$

Deoarece $(7, 4) = 1$ avem $7 \mid \overline{bc}$, $4 \mid \overline{ab}$ și atunci $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{bc}}{7} = k \in \mathbb{N}$

Din $\overline{ab} = 4k$ și $\overline{bc} = 7k$ prin însumare se obține $11k = \overline{ab} + \overline{bc} = 11b + 10a + c = 11(b + a) + (c - a)$
 $\Rightarrow c - a = 11(k - b - a) : 11$

Deoarece $a, b, c \in \{0, \dots, 9\}$ rezultă că $a = c$

b) $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{bc}}{7} \Leftrightarrow \frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{ba}}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{ba} \Leftrightarrow 70a + 7b = 40b + 4a \Leftrightarrow 66a = 33b \Leftrightarrow 2a = b$

Se obțin soluțiile $\overline{abc} \in \{121, 242, 363, 484\}$.

2) Fie $d = (2n + 7, 5n + 3)$

Din $d \mid 2n + 7$ și $d \mid 5n + 3$ se obține $d \mid 5(2n + 7) - 2(5n + 3) \Leftrightarrow d \mid 29 \Leftrightarrow d \in \{1, 29\}$

a) Dacă $F = \frac{2n+7}{5n+3}$ este reductibilă atunci $d > 1 \Rightarrow d = 29$

Din $29 \mid 2n + 7 \Rightarrow 2n + 7 \geq 29 \Rightarrow n \geq 11$

b) Dacă $F = \frac{2n+7}{5n+3}$ este reductibilă atunci $d = 29 \mid 2n + 7$

Deoarece $2n + 7$ este impar $2n + 7 = 29(2k + 1) \Rightarrow 2n + 7 = 58k + 29 \Rightarrow n = 29k + 11$

Atunci $n_i = 29k_i + 11$ și $n_1 + n_2 + \dots + n_{2014} = 29(k_1 + k_2 + \dots + k_{2014}) + 11 \cdot 2014 \not\equiv 29$

3) a) $\triangle MBC \equiv \triangle NCB (L.L.L.) \Rightarrow \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NCB, \sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle NBC, \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CNB$

Prin diferență se obține și $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle NCM$

$\triangle MBO \equiv \triangle NCO (U.L.U.) \Rightarrow [MO] \equiv [NO] \Rightarrow \triangle MON$ este isoscel

b) $\triangle MAC \equiv \triangle NAB (U.L.U.) \Rightarrow [AM] \equiv [AN]$

$\triangle MAO \equiv \triangle NAO (L.L.L.) \Rightarrow \sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle NAO \Rightarrow (AO \text{ este bisectoarea unghiului } \sphericalangle BAC)$



4) a) $A_1A_2 = 3 \cdot 0 + 1$, $A_2A_3 = 3 \cdot 1 + 1$, $A_3A_4 = 3 \cdot 2 + 1, \dots, A_{99}A_{100} = 3 \cdot 98 + 1$

$$A_1A_{20} = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 18) + 19 = 532 \text{ și } A_1A_{100} = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 98) + 99 = 14652$$

$$A_{20}A_{100} = 14652 - 532 = 14120 \Rightarrow A_{20}M = MA_{100} = 7060$$

$$A_1M = A_1A_{20} + A_{20}M = 532 + 7060 = 7592$$

b) $M \in [A_kA_{k+1}] \Leftrightarrow A_1M \leq A_1A_{k+1}$ și k este cel mai mic posibil

$$A_1A_{k+1} = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + k - 1) + k = 3 \cdot \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{k(3k-1)}{2}$$

$$\text{Obținem } 7592 \leq \frac{k(3k-1)}{2} \Leftrightarrow 15184 \leq k(3k-1)$$

Deoarece $71 \cdot (3 \cdot 71 - 1) = 15052$ și $72 \cdot (3 \cdot 72 - 1) = 15480$ se obține $k = 72$ și $M \in [A_{72}A_{73}]$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a VI-a

Bareme

1) a) $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{bc}}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{bc}$ 1p

Deoarece $(7, 4) = 1$ avem $7 \mid \overline{bc}$, $4 \mid \overline{ab}$ și atunci $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{bc}}{7} = k \in \mathbb{N}$ 1p

Din $\overline{ab} = 4k$ și $\overline{bc} = 7k$ prin însumare se obține $11k = \overline{ab} + \overline{bc} = 11b + 10a + c = 11(b + a) + (c - a)$
 $\Rightarrow c - a = 11(k - b - a) : 11$ 1p

Deoarece $a, b, c \in \{0, \dots, 9\}$ rezultă că $a = c$ 1p

b) $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{bc}}{7} \Leftrightarrow \frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{ba}}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{ba} \Leftrightarrow 70a + 7b = 40b + 4a \Leftrightarrow 66a = 33b \Leftrightarrow 2a = b$..2p

Se obțin soluțiile $\overline{abc} \in \{121, 242, 363, 484\}$ 1p

2) Fie $d = (2n + 7, 5n + 3)$

Din $d \mid 2n + 7$ și $d \mid 5n + 3$ se obține $d \mid 5(2n + 7) - 2(5n + 3) \Leftrightarrow d \mid 29 \Leftrightarrow d \in \{1, 29\}$ 2p

a) Dacă $F = \frac{2n+7}{5n+3}$ este reductibilă atunci $d > 1 \Rightarrow d = 29$ 1p

Din $29 \mid 2n + 7 \Rightarrow 2n + 7 \geq 29 \Rightarrow n \geq 11$ 1p

b) Dacă $F = \frac{2n+7}{5n+3}$ este reductibilă atunci $d = 29 \mid 2n + 7$ 1p

Deoarece $2n + 7$ este impar $2n + 7 = 29(2k + 1) \Rightarrow 2n + 7 = 58k + 29 \Rightarrow n = 29k + 11$ 1p

Atunci $n_i = 29k_i + 11$ și $n_1 + n_2 + \dots + n_{2014} = 29(k_1 + k_2 + \dots + k_{2014}) + 11 \cdot 2014 \not\equiv 29$ 1p

3) a) $\triangle MBC \equiv \triangle NCB (L.L.L.) \Rightarrow \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NCB, \sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle NBC, \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CNB}$ 1p

Prin diferență se obține și $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle NCM$

$\triangle MBO \equiv \triangle NCO (U.L.U.) \Rightarrow [MO] = [NO] \Rightarrow \triangle MON$ este isoscel2p

b) $\triangle MAC \equiv \triangle NAB (U.L.U.) \Rightarrow [AM] = [AN]$ 2p

$\triangle MAO \equiv \triangle NAO (L.L.L.) \Rightarrow \sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle NAO \Rightarrow (AO$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ 2p

4) a) $A_1A_2 = 3 \cdot 0 + 1$, $A_2A_3 = 3 \cdot 1 + 1$, $A_3A_4 = 3 \cdot 2 + 1, \dots, A_{99}A_{100} = 3 \cdot 98 + 1$

$A_1A_{20} = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 18) + 19 = 532$ și $A_1A_{100} = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 98) + 99 = 14652 \dots \dots \dots 1p$

$A_{20}A_{100} = 14652 - 532 = 14120 \Rightarrow A_{20}M = MA_{100} = 7060 \dots \dots \dots 1p$

$A_1M = A_1A_{20} + A_{20}M = 532 + 7060 = 7592 \dots \dots \dots 1p$

b) $M \in [A_kA_{k+1}] \Leftrightarrow A_1M \leq A_1A_{k+1}$ și k este cel mai mic posibil. $\dots \dots \dots 1p$

$A_1A_{k+1} = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + k - 1) + k = 3 \cdot \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{k(3k-1)}{2} \dots \dots \dots 1p$

Obținem $7592 \leq \frac{k(3k-1)}{2} \Leftrightarrow 15184 \leq k(3k-1) \dots \dots \dots 1p$

Deoarece $71 \cdot (3 \cdot 71 - 1) = 15052$ și $72 \cdot (3 \cdot 72 - 1) = 15480$ se obține $k = 72$ și $M \in [A_{72}A_{73}] \dots \dots \dots 1p$