

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14 DECEMBRIE 2019
BAREM
CLASA a VII-a**

Subiectul 1.		
a)	$2 \cdot \overline{ab} - 3 \cdot (a - 5b) + 17 = 20a + 2b - 3a + 15b + 17 = 17a + 17b + 17 = 17 \cdot (a + b + 1)$	1p
	$\sqrt{2 \cdot \overline{ab} - 3 \cdot (a - 5b) + 17} = \sqrt{17 \cdot (a + b + 1)} \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b + 1 = 17k^2, k \in \mathbb{N}$ Cum $1 \leq a + b + 1 \leq 19 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a + b + 1 = 17 \Rightarrow a + b = 16$	2p
	Finalizare: $\overline{ab} \in \{79, 88, 97\}$.	1p
b)	$A \cdot B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2020$ deci media geometrică este $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2020}$	1p
	Folosind, de exemplu numărul prim 2017, $A \cdot B : 2017$ dar $A \cdot B$ nu este divizibil cu 2017^2 deci produsul $A \cdot B$ nu este pătrat perfect. Concluzia ...	2p
Subiectul 2.		
a)	$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$	2p
	$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$	1p
	$x = \sqrt{\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{2}{n \cdot (n+1)}} = \sqrt{\frac{2}{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	1p
b)	Dacă p și q impare, atunci p^2 și q^2 sunt numere de forma $4k+1$, deci $p^2 + q^2 + 2020$ este de forma $4k+2$, deci nu este pătrat perfect și de aici concluzia	2p
Subiectul 3.		
a)	$\triangle ACM$, $[CB]$ mediană. Cum $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow O$ mijlocul $[AC] \Rightarrow [MO]$ mediană, deci N este centrul de greutate al $\triangle ACM$	1p
	Deci $[AP]$ mediană $\Rightarrow P$ mijlocul $[CM] \Rightarrow OP$ linie mijlocie în $\triangle ACM$	1p
	$OP \parallel AM \Rightarrow OP \parallel AB$; $OP = \frac{AM}{2} = AB \Rightarrow OPBA$ este paralelogram	1p
b)	$[NP]$ mediana în $\triangle CNM \Rightarrow A_{\triangle CNM} = 2 \cdot A_{\triangle MNP} = 72 \text{ cm}^2$	1p
	$\frac{CN}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A_{\triangle CNM}}{A_{\triangle CBM}} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_{\triangle CBM} = 108 \text{ cm}^2$	1p
	$[CB]$ mediană în $\triangle CAM \Rightarrow A_{\triangle CAB} = A_{\triangle CBM} = 108 \text{ cm}^2$ Deci $A_{ABCD} = A_{\triangle CAB} \cdot 2 = 216 \text{ cm}^2$	2p

Subiectul 4.		
a)	Se demonstrează că diagonalele se înjumătățesc	2p
b)	Presupunem că patrulaterul $ABCD$ are cel puțin două unghiuri drepte (trei nu pot fi) Avem următoarele situații:	
	I. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90^\circ \Rightarrow AB \parallel DC$, dar $EB \parallel DC$ (din punctul anterior), deci imposibil	1p
	II. $\sphericalangle D = \sphericalangle C = 90^\circ \Rightarrow AD \parallel BC$, dar $ED \parallel BC$, deci imposibil	1p
	III. $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ$ În $\triangle BAC$ dreptunghic, $BE = \frac{AC}{2} (= CE = AE)$, iar în $\triangle DAC$, $DE = \frac{AC}{2} (= CE = AE)$ Obținem astfel că $BECD$ este romb, și că $\triangle DCE$ și $\triangle BCE$ sunt echilaterale $\Rightarrow \sphericalangle BCD = 120^\circ$ deci $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Obținem și în acest caz contradicție, deci patrulaterul nu poate avea decât maxim un unghi drept.	3p