

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**ETAPA LOCALĂ****30 ianuarie 2016****CLASA A XI-A**

- 1.) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2016 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R}_+)$ pentru care au loc relațiile $A \cdot X = X \cdot A$ și $X^{2016} + X = A$.
- 2.) Fie a, b, c respectiv A, B, C lungimile laturilor, respectiv măsurile unghiurilor unui triunghi. Arătați că:
$$\begin{vmatrix} b \cos C & c \cos B & \sin A \\ c \cos A & a \cos C & \sin B \\ a \cos B & b \cos A & \sin C \end{vmatrix} = 0.$$
- 3.) Se consideră șirul recurent $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru care $a_0 = 2$ și a_{n+1} este egal cu modulul soluțiilor complexe ale ecuației de gradul doi cu coeficienți numere reale $z^2 - a_n z + a_n = 0$.
- a) Determinați în funcție de n formula termenului general al șirului.
- b) Calculați limita șirului $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $b_n = 2^n(a_n - 1)$.
- 4.) Pentru fiecare mulțime din mulțimile $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, se consideră mulțimea $B_n \subset A_n$ după următoarea regulă: pentru orice $x, y \in B_n$, $x \leq y$ avem $xy \notin B_n$ și B_n conține cele mai multe elemente posibile. Formăm șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_n = |B_n|$ (cardinalul mulțimii B_n), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Determinați mulțimea B_{2016} și calculați valoarea lui b_{2016} .
- b) Determinați formula termenului general al șirului $(b_n)_{n \geq 1}$ în funcție de n .
- c) Determinați termenul general al șirului $c_n = \frac{\sum_{i=1}^{n^2-1} b_i}{n^4}$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ în cazul în care există, sau arătați că această limită nu există.

Notă:**Toate subiectele sunt obligatorii.****Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.****Timp de lucru 3 ore.**