

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 22 februarie 2020

Subiect clasa a VI-a

PROBLEMA 1

(3p) a) Fie $a = (3^{11})^3 : 9^{15} - (2^4)^{15} : 8^{20}$. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \leq x \leq a\}$.

(4p) b) Fie $a, b \in \mathbf{N}$ și mulțimile $A = \{3a+3; 7\}$ și $B = \{3a+1; b+3\}$. Determinați a și $b \in \mathbf{N}$ astfel încât $A \cup B$ să aibă două elemente.

PROBLEMA 2

(4p) a) Arătați că dacă numerele $\overline{a3bc}$, $\overline{b4cd}$, $\overline{c5da}$, $\overline{d6ab}$ sunt divizibile cu 9, atunci $\overline{abcd}$ este divizibil cu 3.

(3p) b) Dacă a, b, c sunt numere raționale astfel încât $a+b=8$, $b+c=3$, $c+d=10$, stabiliți dacă numărul $n = 7a + 15b + 10c + 2d$ este pătrat perfect.

PROBLEMA 3

Știind că numerele nenule $x+y$, $y+z$, $z+x$ sunt direct proporționale cu numerele $a+1$, $a+2$, respectiv $a+3$,

unde $a \in \mathbf{N}^*$, demonstrați că $2 < \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \leq 11, (7)$.

PROBLEMA 4

Se dau unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$, unghiuri în jurul unui punct cu interioarele disjuncte, astfel încât $m(\widehat{AOB}) = a \cdot m(\widehat{BOC})$, $m(\widehat{DOC}) = b \cdot m(\widehat{BOC})$, $m(\widehat{DOA}) = c \cdot m(\widehat{AOB})$. Numerele a, b, c verifică relațiile $a \cdot b = 0,3$; $b \cdot c = 0, (3)$; $c \cdot a = 0,4$.

(4p) a) Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$.

(3p) b) Determinați măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului $\widehat{DOA}$ și semidreapta opusă lui $[OB]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a VI-a

PROBLEMA 1

(3p) a) Fie $a = (3^{11})^3 : 9^{15} - (2^4)^{15} : 8^{20}$. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq a\}$.

(4p) b) Fie $a, b \in \mathbb{N}$ și mulțimile $A = \{3a+3; 7\}$ și $B = \{3a+1; b+3\}$. Determinați a și $b \in \mathbb{N}$ astfel încât $A \cup B$ să aibă două elemente.

să aibă două elemente.

Soluție:

a) $a = 3^{33} : 3^{30} - 2^{60} : 2^{60} = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$= 3^3 - 2^0 = 27 - 1 = 26 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\Rightarrow A = \{3; 4; \dots 26\} \Rightarrow \text{card } A = 24 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

b) Cum $3a+3 \neq 3a+1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

din $3a+1=7 \Rightarrow a=2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

din $b+3=3a+3 \Rightarrow b=6 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\Rightarrow A = \{9; 7\}$ și $B = \{7; 9\}$ deci $\text{card}(A \cup B) = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

(problemă propusă de prof. Márkus Viola-Éva - Liceul Tehnologic „Petri Mór” Nușfalău)

PROBLEMA 2

(4p) a) Arătați că dacă numerele $\overline{a3bc}$, $\overline{b4cd}$, $\overline{c5da}$, $\overline{d6ab}$ sunt divizibile cu 9, atunci $\overline{abcd}$ este divizibil cu 3.

(3p) b) Dacă a, b, c sunt numere raționale astfel încât $a+b=8$, $b+c=3$, $c+d=10$, stabiliți dacă numărul $n = 7a + 15b + 10c + 2d$ este pătrat perfect.

Soluție:

a) Conform criteriului de divizibilitate cu 9, avem

$9|a+b+c+3$, $9|b+c+d+4$, $9|c+d+a+9$, $9|d+a+b+6$, $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

de unde 9 divide suma lor, adică $9|[3 \cdot (a + b + c + d) + 18] \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Rezultă că $9|3 \cdot (a + b + c + d)$, $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

deci $3|(a + b + c + d)$, ceea ce înseamnă că $3|\overline{abcd}$ 1 punct

(problemă propusă de prof. Nagy Erzsébet, Școala Gimnazială „Gyulaffy László” Cehu Silvaniei)

b) Observăm că, pentru a obține $7a$ trebuie să înmulțim prima relație cu 7, iar pentru a obține $2d$ trebuie să înmulțim prima relație cu 2 1 punct

$$a + b = 8 | \cdot 7 \Rightarrow 7a + 7b = 56$$

$$b + c = 3 | \cdot 8 \Rightarrow 4b + 4c = 24 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$c + d = 10 | \cdot 2 \Rightarrow 2c + 2d = 20$$

Însumând obținem $n = 7a + 15b + 10c + 2d = 56 + 24 + 20 = 100 = 10^2$ pp 1 punct

(problemă selectată din G.M. și propusă de Școala Gimnazială „Lucian Blaga” Jibou)

PROBLEMA 3

Știind că numerele nenule $x+y$, $y+z$, $z+x$ sunt direct proporționale cu numerele $a+1$, $a+2$, respectiv $a+3$,

unde $a \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că $2 < \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \leq 11, (7)$.

Soluție:

Fie k valoarea comună a rapoartelor $\frac{x+y}{a+1} = \frac{y+z}{a+2} = \frac{z+x}{a+3} = k$

$$\Rightarrow x + y = k(a+1), y + z = k(a+2), z + x = k(a+3) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$x + y + z = \frac{3k}{2}(a+2), \text{ de unde } x = \frac{k}{2}(a+2), y = \frac{k}{2}a, z = \frac{k}{2}(a+4) \quad \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Și inegalitățile devin:

$$2 < \left(\frac{a+2}{a}\right)^2 + \left(\frac{a+4}{a+2}\right)^2 \leq 11, (7) \Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{a+2}\right)^2 < 11, (7) \quad \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 > 1, \left(1 + \frac{2}{a+2}\right)^2 > 1, \text{ deci } \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{a+2}\right)^2 > 2 \dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Deoarece } a \geq 1, \text{ avem } \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{a+2}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{2}{1}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 = 9 + 2, (7) = 11, (7) \quad \dots\dots 1 \text{ punct}$$

(problemă propusă de prof. Mezei Mirela, Școala Gimnazială „Corneliu Coposu” Zalău)

PROBLEMA 4

Se dau unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$, unghiuri în jurul unui punct cu interioarele disjuncte, astfel încât $m(\widehat{AOB}) = a \cdot m(\widehat{BOC})$, $m(\widehat{DOC}) = b \cdot m(\widehat{BOC})$, $m(\widehat{DOA}) = c \cdot m(\widehat{AOB})$. Numerele a, b, c verifică relațiile $a \cdot b = 0,3$; $b \cdot c = 0, (3)$; $c \cdot a = 0,4$.

(4p) a) Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$.

(3p) b) Determinați măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului $\widehat{DOA}$ și semidreapta opusă lui $[OB$.

Soluție:

a) Din $a \cdot b = 0,3$ $b \cdot c = 0, (3)$ $c \cdot a = 0,4$ obținem $a \cdot b \cdot c = \frac{2}{10}$

Apoi $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{3}$ 1punct

$\Rightarrow m(\widehat{AOB}) = \frac{3}{5} m(\widehat{BOC})$, $m(\widehat{DOC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BOC})$, $m(\widehat{DOA}) = \frac{2}{3} m(\widehat{AOB}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} m(\widehat{BOC}) = \frac{2}{5} m(\widehat{BOC})$ 1punct

$\Rightarrow m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOA}) = 360^\circ \Rightarrow$

$\dots \Rightarrow 5m(\widehat{BOC}) = 720^\circ \Rightarrow m(\widehat{BOC}) = 144^\circ$ 1punct

$m(\widehat{AOB}) = 86^\circ 24'$ și $m(\widehat{DOC}) = 72^\circ$, $m(\widehat{AOD}) = 57^\circ 36'$ 1punct

b) $[OM$ bisectoarea $\widehat{AOB} \Rightarrow m(\widehat{MOD}) = 28^\circ 48'$ 1punct

$[ON$ semidreapta opusă lui $[OB \Rightarrow m(\widehat{DON}) = 36^\circ$ 1punct

Atunci $m(\widehat{MON}) = m(\widehat{MOD}) + m(\widehat{DON}) = 64^\circ 48'$ 1punct

(selectată și propusă de prof. Crișan Gabriela – Colegiul Național „Silvania” Zalău)