

**MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ**

2014. február 23.

XII. OSZTÁLY

M 1 – es program

- 1.) Határozd meg az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazának véges zárt részhalmazait a „o” műveletre nézve, ha $xoy = xy - 2014x - 2014y + 2014^2 + 2014, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ esetén!
- 2.) Adott az $A_a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix és a $H = \{A_a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz.
- a.) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ legkisebb pozitív értékét, amelyre a H halmaznak pontosan 12 eleme van!
- b.) Az előbb meghatározott a érték esetén határozd meg a $(H, \cdot)$ kommutatív csoport azon elemeit, amelyek egyenlők saját inverzükkel!
- 3.) Számítsd ki :
- a.) $\int \arcsin(\sin x) dx, x \in (0, \pi).$
- b.) $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2} dx, (x>0).$
- 4.) Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény amelyre $f^3(x) + 3^{f(x)} = x, \forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye!

Megjegyzés:

**Minden feladat kötelező.
Minden feladat 10 pontot ér.
Munkaidő 3 óra**