

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a XII-a

Subiecte:

1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$.

- a) Determinați numărul elementelor lui M .
- b) Să se calculeze suma elementelor lui M .
- c) Dacă $G = \{A \in M \mid \det A = 1\}$, să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.

2. Se consideră mulțimea de funcții:

$$G = \{f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_a(x) = x - 2a[x] + a[2x], a \in \mathbb{Z}\}, \text{ unde } [y] \text{ este partea întregă a numărului } y.$$

- a) Să se arate că dacă $f_a, f_b \in G$, atunci $f_a \circ f_b \in G$.
- b) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ, izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$ unde „ $\circ$ ” este compunerea funcțiilor.

3. Să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

4. Se consideră funcția

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt.$$

a) Arătați că:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

b) Calculați

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{e^x}$$

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*