

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală, 16.02.2014  
Clasa a IX-a

**Subiecte:**

1. Numerele reale  $a, b, c, d$  verifică relația  $a + b + c + d = 2$ . Să se arate că:

a)  $\frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2$ .

b)  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$ .

2. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică de numere naturale nenule și mulțimea

$$A = \{p \in \mathbb{N}^* \mid a_{a_p} = a_p + a_{p+1}\}$$

Să se arate că dacă 2014 este termen al progresiei și  $A \neq \emptyset$ , atunci  $A = \mathbb{N}^*$ .

Prof. Burtea Marius, Alexandria

3. Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$ , punctele  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $[AB]$ , respectiv  $[AD]$ , iar punctele  $P, Q$  simetricele punctului  $C$  în raport cu punctele  $M$ , respectiv  $N$ .

a). Să se arate că  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DQ}$ .

b). Dacă  $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CA}$ , să se arate că patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram.

c). Dacă  $E, F$  sunt mijloacele segmentelor  $[BD]$ , respectiv  $[PQ]$  să se arate că punctele  $C, A, E, F$  sunt coliniare sau sunt vârfurile unui paralelogram.

Prof. Burtea Marius, Alexandria

4. Fie  $ABC$  un triunghi,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  și punctele  $D$  și  $E$  astfel încât

$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{BC}$ . Să se arate că punctele  $A, D, E$  sunt coliniare.

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*