

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2018
ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2018
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VIII-a

Problema 1. (7 puncte)

Aflați numerele reale $a; b; c$ știind că:

$$[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{a; b; c\} \text{ și că } a^2 + b^2 - 5b = 9$$

Soluție. Din $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{a; b; c\}$ rezultă că $a; b; c \in \mathbb{Z}$ și $b = a + 2, c = a + 1$..(2p)

Înlocuind în relația dată obținem: $a^2 + (a + 2)^2 - 5(a + 2) = 9 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 15 = 0$ (2p)

adică $(a - 3)(2a + 5) = 0$ (1p)

Deoarece $a \in \mathbb{Z}$ rămâne doar $a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ (1p)

Se obține $b = 5$ și $c = 4$ (1p)

Problema 2. (7 puncte)

Arătați că $x = 5^{3n} + 5^{2n+1} + 3 \cdot 5^n - 9$ se divide cu 64 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Notăm $5^n = a$ și obținem relațiile: $x = a^3 + 5a^2 + 3a - 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = a^3 - a^2 + 6a^2 - 6a + 9a - 9 \Leftrightarrow x = a^2(a - 1) + 6a(a - 1) + 9(a - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (a - 1)(a + 3)^2, \text{ adică } x = (5^n - 1)(5^n + 3)^2 \text{ (3p)}$$

$$\text{Dar } 5^n - 1 = (M_4 + 1)^n - 1 = M_4 \Rightarrow 5^n - 1 \vdots 4 \text{ (1p)}$$

$$5^n + 3 = (M_4 + 1)^n + 3 = M_4, \text{ deci } (5^n + 3)^2 \vdots 16 \text{ (2p)}$$

$$\text{Și deci } x \vdots 64 \text{ (1p)}$$

Problema 3. (7 puncte)

Se taie colțurile unui cub cu muchia de 2 cm, plecând de la mijlocul fiecărei laturi. Arătați că suprafața corpului obținut este mai mică decât 19 cm^2 .

Soluție. Corpul obținut are 14 fețe, din care 6 pătrate de latură $\sqrt{2}$ (2p)

și 8 triunghiuri echilaterale de latură $\sqrt{2}$ (2p)

$$\text{Aria corpului este } 6 \cdot \sqrt{2}^2 + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12 + 4\sqrt{3} \text{ (2p)}$$

$$\text{Finalizare, } 12 + 4\sqrt{3} = 12 + \sqrt{48} < 12 + \sqrt{49} = 19 \Rightarrow A < 19 \text{ cm}^2 \text{ (1p)}$$

Problema 4. (7 puncte)

În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 6 \text{ dm}$, $AA' = 10 \text{ dm}$, $M \in (AA')$, $AM = 6 \text{ dm}$, $N \in (BB')$, $BN = 3 \text{ dm}$, $P \in (CC')$, $CP = 2 \text{ dm}$, $Q \in (DD')$, $DQ = 5 \text{ dm}$.

- Arătați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.
- Arătați că $MNPQ$ nu este dreptunghi.

Soluție. a). $ABCD$ pătrat, $AC \cap BD = \{O\}$ atunci O mijloc pt. AC și BD .

Fie O_1 mijlocul lui MP . Din $MA \parallel PC$ și $MA \neq PC \Rightarrow MACP$ trapez în care OO_1 este linie mijlocie; deci $OO_1 = \frac{MA + PC}{2} = 4$ și $OO_1 \parallel MA \parallel PC$ (1p)

Fie O_2 mijlocul lui QN . Din $BN \parallel DQ$ și $BN \neq DQ \Rightarrow BDQN$ trapez în care OO_2 este linie mijlocie; deci $OO_2 = \frac{BN + DQ}{2} = 4$ și $OO_2 \parallel BN \parallel DQ$ (1p)

Rezultă $OO_1 = OO_2$ și $OO_1 \parallel MA \parallel BN \parallel OO_2$, adică O, O_1, O_2 coliniare (1p)

Deci $O_1 = O_2 = O'$, adică $MP \cap QN = \{O'\}$ și deci M, N, P, Q coplanare (1p)

b). Calculează $MP = \sqrt{88}$ și $NQ = \sqrt{76}$ (1p)

Din $MP \neq NQ$ și O' mijloc pt. MP și $QN \Rightarrow MNPQ$ paralelogram. (1p)

Din MP și QN diagonale necongruente $\Rightarrow MNPQ$ nu este dreptunghi (1p)