



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, 10 februarie 2024**  
**Clasa a XI – a**



**BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:**

| <b>Problema 1: soluție orientativă</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>Punctaj</b> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <p><b>a)</b></p> $X^{2023} = X^{2022} \Rightarrow \det(X^{2023}) = \det(X^{2022}) \Rightarrow (\det X)^{2023} = (\det X)^{2022} \Rightarrow (\det X)^{2022} (\det X - 1) = 0$ <p>Deci <math>\det X \in \{0, 1\}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1p             |
| <p><u>Caz 1:</u> Dacă <math>\det X = 1 \neq 0</math>, atunci <math>X</math> e matrice inversabilă și egalitatea <math>X^{2023} = X^{2022}</math> duce la <math>X^{2023} \cdot X^{-2020} = X^{2022} \cdot X^{-2020}</math>, adică <math>X^3 = X^2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1p             |
| <p><u>Caz 2:</u> Dacă <math>\det X = 0</math>, din identitatea Hamilton - Cayley obținem <math>X^2 - (\text{tr} X) \cdot X = O_2</math>, deci <math>X^2 = (\text{tr} X) \cdot X</math> (*).</p> <p>Atunci <math>X^3 = (\text{tr} X)^2 \cdot X</math> și, inductiv, <math>X^{2022} = (\text{tr} X)^{2021} \cdot X</math>, respectiv <math>X^{2023} = (\text{tr} X)^{2022} \cdot X</math>. Din <math>X^{2023} = X^{2022}</math> deducem <math>(\text{tr} X)^{2022} \cdot X = (\text{tr} X)^{2021} \cdot X \Leftrightarrow (\text{tr} X)^{2021} (\text{tr} X - 1) \cdot X = O_2</math>, de unde <math>X = O_2</math>, sau <math>\text{tr} X = 0</math>, sau <math>\text{tr} X = 1</math>.</p> <p>i) Dacă <math>X = O_2</math>, evident <math>X^3 = X^2</math>.</p> <p>ii1) Dacă <math>X \neq O_2</math> și <math>\text{tr} X = 0</math>, din (*) obținem <math>X^2 = O_2</math> și apoi <math>X^3 = X^2 \cdot X = O_2 \cdot X = O_2</math>, deci <math>X^3 = X^2</math>.</p> <p>ii2) Dacă <math>X \neq O_2</math> și <math>\text{tr} X = 1</math>, din (*) obținem <math>X^2 = X</math> și apoi, <math>X^3 = X^2</math>.</p> | 2p             |
| <p><b>b)</b></p> <p>Formularea predicatului unar <math>P(n)</math>: „<math>A^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos^n 2\alpha}{2} &amp; \frac{1 - \cos^n 2\alpha}{2} &amp; 0 &amp; 0 \\ \frac{1 - \cos^n 2\alpha}{2} &amp; \frac{1 + \cos^n 2\alpha}{2} &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; \cos(n\beta) &amp; \sin(n\beta) \\ 0 &amp; 0 &amp; -\sin(n\beta) &amp; \cos(n\beta) \end{pmatrix}</math>”,</p> <p><math>n \in \mathbb{N}^*</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1p             |
| Etapa de verificare                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1p             |
| Etapa de demonstrație propriu-zisă și finalizare                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1p             |

| <b>Problema 2: soluție orientativă</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>Punctaj</b> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <p>Din teorema Hamilton- Cayley <math>\Rightarrow A^2 = (trA) \cdot A</math> și <math>B^2 = (trB) \cdot B</math> (*), de unde</p> <p><math>A^2 B^2 = (trA)(trB) \cdot AB</math> și cum <math>A^2 B^2 = (AA)(BB) = A(AB)B = A(BA)B = (AB)(AB) = (AB)^2</math>, deducem <math>(AB)^2 = (trA)(trB) \cdot (AB)</math> (1).</p>           | 2p             |
| <p><math>det(AB) = (detA)(detB) = 0</math>, deci conform teoremei Hamilton- Cayley,</p> <p><math>(AB)^2 = (tr(AB)) \cdot (AB)</math>. (2)</p>                                                                                                                                                                                        | 1p             |
| <p>Din (1) și (2) <math>(trA)(trB) \cdot (AB) = (tr(AB)) \cdot (AB)</math> și, cum <math>AB \neq O_2</math>, obținem</p> <p><math>(trA)(trB) = tr(AB)</math>. (**)</p>                                                                                                                                                               | 1p             |
| <p><math>(aA + bB)^2 = (aA + bB)(aA + bB) \stackrel{AB=BA}{=} a^2 A^2 + 2abAB + b^2 B^2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow}</math></p> <p><math>\stackrel{(*)}{\Rightarrow} (aA + bB)^2 = a^2 (trA)A + 2abAB + b^2 (trB)B</math>. (3)</p>                                                                                                    | 1p             |
| <p>Din teorema Hamilton- Cayley, <math>(aA + bB)^2 = tr(aA + bB) \cdot (aA + bB) - det(aA + bB)I_2 =</math></p> <p><math>= [a(trA) + b(trB)](aA + bB) - det(aA + bB)I_2</math></p> <p><math>= a^2(trA) \cdot A + ab(trA) \cdot B + ab(trB) \cdot A + b^2(trB) \cdot B -</math></p> <p><math>- det(aA + bB) \cdot I_2</math>. (4)</p> | 1p             |
| <p>(3) <math>\Rightarrow tr((aA + bB)^2) = a^2 (trA)^2 + 2ab \cdot tr(AB) + b^2 \cdot (trB)^2</math></p> <p>(4) <math>\Rightarrow tr((aA + bB)^2) = a^2 (trA)^2 + 2ab \cdot tr(A)tr(B) + b^2 \cdot (trB)^2 - 2det(aA + bB)</math>, de unde</p> <p><math>\stackrel{(**)}{\Rightarrow} det(aA + bB) = 0</math>.</p>                    | 1p             |

| <b>Problema 3: soluție orientativă</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>Punctaj</b> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <p><math>x_1 = 0</math>, <math>x_2 = 1</math>, <math>x_3 = \sqrt{3}</math> și putem considera predicatul unar <math>P(n)</math>: „<math>n - 2 &lt; x_n &lt; n</math>”, <math>n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> <p>I. Etapa de verificare</p> <p><math>P(1)</math>: „<math>-1 &lt; x_1 = 0 &lt; 1</math>”, adevărată.</p> <p><math>P(2)</math>: „<math>0 &lt; x_2 = 1 &lt; 2</math>”, adevărată.</p> <p>II. Etapa de demonstrație propriu-zisă:</p> <p>Presupunem <math>P(k)</math> adevărată, unde <math>P(k)</math>: „<math>k - 2 &lt; x_k &lt; k</math>” și arătăm că <math>P(k+1)</math> adevărată, unde</p> <p><math>P(k+1)</math>: „<math>k - 1 &lt; x_{k+1} &lt; k + 1</math>”.</p> <p>Din <math>P(k)</math>: <math>k - 2 &lt; x_k &lt; k \mid \cdot k &gt; 0 \Rightarrow k(k - 2) &lt; kx_k &lt; k^2 \mid +1 \Rightarrow (k - 1)^2 &lt; 1 + kx_k &lt; k^2 + 1 &lt; (k + 1)^2</math>, de unde</p> <p><math>k - 1 &lt; \sqrt{1 + kx_k} &lt; k + 1 \Leftrightarrow k - 1 &lt; x_{k+1} &lt; k + 1</math>, deci <math>P(k+1)</math> adevărată.</p> <p>Conform primului principiu al inducției matematice rezultă <math>P(n)</math> adevărată, <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> | 2p             |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <p>Astfel, cu ajutorul lemei cleștelui și din <math>n-2 &lt; x_n &lt; n</math> obținem <math>\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty</math>, iar din <math>\frac{n-2}{n} &lt; \frac{x_n}{n} &lt; 1</math> obținem <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1p |
| <p>Atunci <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n}\right)^n \stackrel{„1^\infty”}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{x_n - n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n - n}} \right]^{\frac{x_n - n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}</math>, unde <math>y_n = x_n - n, \forall n \in \mathbb{N}^* . (*)</math></p> <p>Din <math>n-2 &lt; x_n &lt; n \mid -n \Rightarrow -2 &lt; x_n - n &lt; 0 \Rightarrow y_n \in (-2, 0), \forall n \in \mathbb{N}^* . (1)</math></p> <p><math>y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - n - 1 - x_n + n = x_{n+1} - x_n - 1 = (x_{n+1} - 1) - x_n = \frac{x_{n+1}^2 - 1}{x_{n+1} + 1} - x_n \stackrel{x_{n+1}^2 = 1 + nx_n}{=} \frac{nx_n}{x_{n+1} + 1} - x_n =</math></p> <p><math>= x_n \left( \frac{n}{x_{n+1} + 1} - 1 \right) = \frac{x_n (n - x_{n+1} - 1)}{x_{n+1} + 1} &lt; 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (deoarece } n-1 &lt; x_{n+1} \text{)}, \text{ deci } (y_n)_{n \geq 1} \text{ strict}</math></p> <p>descrescător (2).</p> <p>Din (1) și (2) <math>\stackrel{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow} (y_n)_{n \geq 1}</math> convergent, deci există <math>\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \stackrel{\text{not}}{=} y \in [-2, 0]</math>.</p> | 2p |
| <p><math>y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - (n+1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + nx_n} - (n+1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + nx_n - (n+1)^2}{\sqrt{1 + nx_n} + n + 1} \stackrel{x_n = y_n + n}{=}</math></p> <p><math>= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny_n + n^2 - n^2 - 2n}{\sqrt{1 + ny_n + n^2} + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny_n - 2n}{\sqrt{1 + ny_n + n^2} + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(y_n - 2)}{n \left( \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} y_n + 1} + 1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{y - 2}{2} .</math></p> <p>Deci <math>y = \frac{y-2}{2} \Rightarrow y = -2 . (**)</math></p> <p>Din (*) și (**) obținem <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n}\right)^n \stackrel{„1^\infty”}{=} e^{-2} = \frac{1}{e^2} .</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2p |

| <b>Problema 4: soluție orientativă</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>Punctaj</b> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <p><b>a)</b> Cum funcția <math>g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_2 x</math> este strict crescătoare pe <math>(0, +\infty)</math>, aplicând <math>g</math> peste inegalitatea din ipoteză obținem <math>f(x) \leq \log_2 x &lt; f(x) + 1, \forall x &gt; 1</math> și cum <math>f(x) \in \mathbb{N}</math>, deducem că <math>f(x) = [\log_2 x], \forall x &gt; 1</math>.</p>                                                          | 1p             |
| <p>Astfel, <math>f(x) = n</math>, dacă <math>n \leq \log_2 x &lt; n+1</math>, pentru <math>\forall n \in \mathbb{N}</math> și, încă, <math>f(x) = n, \forall x \in [2^n, 2^{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                               | 1p             |
| <p>Pentru <math>\alpha \in (2^n, 2^{n+1}), \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = n, \forall n \in \mathbb{N} . (*)</math></p> <p>Pentru <math>\alpha = 2^n, \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x &gt; \alpha}} f(x) = n, \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x &lt; \alpha}} f(x) = n-1, \forall n \in \mathbb{N} . (**)</math></p> <p>Pentru <math>\alpha = 1, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x &gt; 1}} f(x) = 0 (n=0) . (***)</math></p> | 1p             |
| <p>Din (*), (**) și (***) rezultă că <math>\{\alpha \in (1, +\infty) \mid f \text{ nu are limită în } \alpha\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <p><b>b) Demonstrăm prin inducție matematică după <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, <math>P(n)</math>: „<math>x_{n+1} &gt; \sum_{k=1}^n kx_k</math>” (*).</b></p> <p><b>I. Verificare</b></p> <p>Pentru <math>n=1</math>, <math>P(1)</math> este, evident, adevărată.</p> <p>Pentru <math>n=2</math>, avem :</p> $x_3 \geq 4x_2 - x_1 = 3x_2 + x_2 - x_1 \stackrel{x_2 > x_1}{>} 3x_2 = 2x_2 + x_2 \stackrel{x_2 > x_1}{>} 2x_2 + x_1 = \sum_{k=1}^2 kx_k, \text{ deci } P(2) \text{ adevărată.}$ <p><b>II. Demonstrația propriu-zisă</b></p> <p>Presupunem <math>P(p)</math> adevărată, unde <math>P(p)</math>: <math>x_{p+1} &gt; \sum_{k=1}^p kx_k</math> și arătăm că <math>P(p+1)</math> adevărată, unde</p> $P(p+1): x_{p+2} > \sum_{k=1}^{p+1} kx_k.$ $x_{p+2} \geq (p+3)x_{p+1} - \sum_{k=1}^p kx_k = (p+1)x_{p+1} + 2x_{p+1} - \sum_{k=1}^p kx_k > (p+1)x_{p+1} + 2\sum_{k=1}^p kx_k - \sum_{k=1}^p kx_k =$ $= (p+1)x_{p+1} + \sum_{k=1}^p kx_k = \sum_{k=1}^{p+1} kx_k.$ <p>Cum <math>P(p)</math> adevărată, atunci <math>P(p+1)</math> adevărată și, conform primului principiu al inducției matematice, <math>P(n)</math> adevărată, <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> | 2p |
| <p><b>Demonstrăm prin inducție matematică după <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, <math>Q(n)</math>: „<math>x_n \geq (n-1)!x_1</math>” (**).</b></p> <p><b>I. Verificare</b></p> <p>Pentru <math>n=1</math>, <math>Q(1)</math> este, evident, adevărată.</p> <p>Pentru <math>n=2</math>, avem <math>Q(2)</math>: <math>x_2 \geq (2-1)!x_1 \Leftrightarrow x_2 \geq x_1</math>, care este adevărată din ipoteză.</p> <p><b>II. Demonstrația propriu-zisă</b></p> <p>Presupunem <math>Q(p)</math> adevărată, unde <math>Q(p)</math>: <math>x_p \geq (p-1)!x_1</math> și arătăm că <math>Q(p+1)</math> adevărată, unde</p> $Q(p+1): x_{p+1} \geq p!x_1.$ $(*) \Rightarrow x_{p+1} > \sum_{k=1}^p kx_k \geq px_p \geq p(p-1)!x_1 = p!x_1.$ <p>Cum <math>Q(p)</math> adevărată, atunci <math>Q(p+1)</math> adevărată și, conform primului principiu al inducției matematice, <math>Q(n)</math> adevărată, <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                              | 1p |
| <p>Cum șirul <math>(x_n)_{n \geq 1}</math> verifică (**), iar <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)!x_1 = +\infty</math>, obținem <math>\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1p |

**Notă:** Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.