

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 14.02.2014

Clasa a XI-a

1. (7p) Aflați $x \in R$ pentru care
$$\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^2 & e^{-x} \\ e^2 & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{-4} \end{vmatrix} \leq 0$$

2. Se consideră șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 1}$ definit astfel:

$$f_n : R \rightarrow R, f_1(x) = x, f_{n+1}(x) = \sin(2f_n(x)), \forall n \in N^*. \text{ Notăm } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x} = x_n, \forall n \in N^*.$$

a) (3p) Calculați x_1, x_2 și x_3 .

b) (4p) Aflați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{2^n}$.

Liana Agnola, Doru Isac

3. Pentru un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ definim șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ astfel: $x_n = \min(a_n, a_{n+1})$ și $y_n = \max(a_n, a_{n+1}), n \geq 0$.

a) (2p) Arătați că dacă șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limită, atunci șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ au limită.

b) (5p) Este reciproca adevărată?

GM11/2013

4. Se consideră $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R)$ și $X(z) = I_2 + zA$ pentru orice număr complex z .

a) (3p) Demonstrați că $X(z) \cdot X(\bar{z}) = mA + nI_2$ unde $m, n \in R$.

b) (4p) Dacă $|z| = 1$ și $\text{tr}(A) \geq 0$, demonstrați că $\text{tr}[(A - I_2)^2] \leq \text{tr}[X(z) \cdot X(\bar{z})] \leq \text{tr}[(A + I_2)^2]$, unde $\text{tr}(X)$ este urma matricei X , adică suma elementelor de pe diagonala principală.

Liana Agnola

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.