

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a XI-a

Subiectul 1. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{4} - \dots - \sqrt[n]{n})$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dată prin $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
Determinați $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pentru care următoarea limită:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x)$$

există și apoi indicați valoarea limitei în cazurile respective.

Subiectul 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 = A + I_n$. Demonstrați că:
 $\det A > 0$.

Subiectul 4. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $a^2 + b^2 < 1$. Arătați că
există șiruri $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, să avem:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Mai mult, demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.