INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală , SĂLAJ , 10.02.2024

BAREM DE NOTARE

Clasa a IX-a

Subiectul 1

(3 p) a) Fie expresia E(x) = $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-18x+81}$, unde $x \in [1,2]$.

Determinați cea mai mare și cea mai mică valoare a lui E(x) .

(4 p) b) Fie numărul real
$N=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$. Să se rezolve pe mulțimea numerelor întregi ecuația
$\left[\frac{x+1}{2}\right]=2024[N]$, unde [t] reprezintă partea întreagă a lui t.

Barem:

a) $E(x)=|x-2|+|x-1|-|x-9|$ .... 1 p

$Cum\ x \in [1;2] \Rightarrow |x-2|=-x+2, |x-1|=x-1, |x-9|=-x+9 \Rightarrow E(x)=x-8$................ 1p

Valoare minimă E(1) = - 7 , valoare maximă E(2) =- 6.. 1p

b)

$$N=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{9}}=$$

$\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}(1-\sqrt{5})}{10}$ 1p

$2<\sqrt{5}<3 \Rightarrow -2<1-\sqrt{5}<-1$

$3<\sqrt{10}<4 \Rightarrow -6<\sqrt{10}(1-\sqrt{5})<-4 \Rightarrow -0.6<N<-0.4 \Rightarrow [N]=-1$..........................1p

$\left[\frac{x+1}{2}\right]=2024(-1) \Rightarrow -2024 \leq \frac{x+1}{2}<-2023, x \in Z$

$\Rightarrow -4049 \leq x<-4047, x \in Z$ 1p

Soluția S={-4049,-4048} 1p

Subiectul 2

(7p) Demonstrați că, dacă ab+bc+ac = abc, atunci $\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b} \geq 9, \forall a,b,c>0$.

Barem:

Folosind inegalitatea lui Titu Andreescu avem:

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{a+c}+\frac{2c^2}{a+b} = 2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\right) \geq 2\left(\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(a+c)+(a+b)}\right) = a+b+c \text{ (1)} \text{..................2p}$$

Împărțind egalitatea ab+bc+ac = abc prin abc, obținem:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$..1p

Folosind inegalitatea mediilor: $m_{aritmetică} \geq m_{armonică}$, obținem: 1p

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 3 \text{.........1p}$$

$\Longrightarrow$ a+b+c $\geq$ 9 (2)...1p

Din (1)și (2) $\Longrightarrow \frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{a+c}+\frac{2c^2}{a+b} \geq 9$ ($\forall$) a,b,c > 0 ....1p

Subiectul 3

(4p) a) Demonstrați următoarea egalitate: $P(n)$: $3+33+333+\cdots+\underbrace{33\ldots3}_{de\ n\ ori} = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$, $n \in N^*$.

(3p) b) Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică de numere naturale astfel încât $a_1 = 1$. Arătați că există $k > 1$ astfel încât a_k să fie pătrat perfect și că progresia aritmetică conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.

Barem:

a) Demonstrăm egalitatea prin inducție matematică.

1) Etapa de verificare: verificarea propoziției pentru n=1 avem
   $P(1): 3 = \frac{81}{27}$ $de\ unde\ 3 = 3\ adevărat$……………………..….................................1p
2) Etapa de demonstrație: $P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in N^*$, adică presupunem P(k) adevărat și demonstrăm P(k+1) adevărat.
   $P(k)$: $3+33+\cdots+\underbrace{33\ldots3}_{de\ k\ ori} = \frac{10^{k+1}-9k-10}{27}$, $k \in N^*$ (A)

   $P(k+1)$: $3+33+\cdots+\underbrace{33\ldots3}_{de\ k+1\ ori} = \frac{10^{k+2}-9(k+1)-10}{27}$, $k \in N^*$……………………..……..1p

Deoarece $\underbrace{33\ldots3}_{de\ k+1\ ori} = 3\cdot\underbrace{111\ldots1}_{k+1} = 3(1+10+10^2+\cdots+10^k) = 3\cdot\frac{10^{k+1}-1}{10-1}$………….……1

$P(k+1)$:

$$3+33+\cdots+\underbrace{33\ldots3}_{de\ k+1\ ori}=3+33+\cdots+\underbrace{33\ldots3}_{de\ k\ ori}+3\cdot\frac{10^{k+1}-1}{9}$$
$$=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}+\frac{10^{k+1}-1}{3}=$$
$$=\frac{10^{k+2}-9k-19}{27}$$ ……………………………………………………………………………1p

$Din\ 1)\ și\ 2)\ rezultă\ că\ P(n)\ adevărat\ n\in N^*.$

b) $r=a_2-a_1\in\mathbb{N}$ deoarece $a_2,\ a_1\in\mathbb{N}$. Luând $k=r+3$ avem $a_k=(r+1)^2$ pătrat perfect ..1p

Pentru $\forall m\in N$, luând $k=m^2r+2m+1$
$avem\ a_k=1+(k-1)r=m^2r^2+2mr+1=(mr+1)^2$ 1p

Rezultă că progresia conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte…......................…..1p

Subiectul 4

Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{O\}=AC\cap BD$.

(5p) a) Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD și DOA determină un paralelogram.

(2p) b) Să se demonstreze că punctul O este centrul paralelogramului $G_1G_2G_3G_4$ dacă și numai dacă are loc relația $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$.

Barem:

a) $\vec{OG_1}=\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$, $\vec{OG_2}=\frac{1}{3}\left(\vec{OB}+\vec{OC}\right)$, $\vec{OG_3}=\frac{1}{3}\left(\vec{OC}+\vec{OD}\right)$, $\vec{OG_4}=\frac{1}{3}\left(\vec{OD}+\vec{OA}\right)$ 2p

$\vec{OG_1}+\vec{OG_3}=\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}\right)=\vec{OG_2}+\vec{OG_4}\Leftrightarrow\vec{OG_2}-\vec{OG_1}=\vec{OG_3}-\vec{OG_4}$ 2p

Deoarece $\left.\begin{array}{l}\vec{OG_2}-\vec{OG_1}=\vec{G_1G_2}\\ \vec{OG_3}-\vec{OG_4}=\vec{G_4G_3}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{G_1G_2}=\vec{G_4G_3}\Leftrightarrow G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram..............................1p

b) În paralelogramul $G_1G_2G_3G_4$ presupunem că $\{O\}=G_1G_3\cap G_2G_4\Leftrightarrow\vec{OG_1}+\vec{OG_3}=\vec{0}$ ..... 1 p

dar $\vec{OG_1}+\vec{OG_3}=\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}\right)$, de unde rezultă $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$ 1p