

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 16 Februarie 2014

Clasa a VIII a

Barem de corectare

1. Dacă n este număr natural nenul atunci fie numărul:

$$A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7} + \dots + \sqrt{1+3+5+\dots+2n-1}$$

a) Arătați că numărul $\sqrt{8A+1}$ este rațional, pentru orice $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

b) Arătați că numărul $\sqrt{2A+1}$ este irațional, pentru orice $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Soluție și barem de corectare

a)

$$1+3+5+\dots+2n-1 = n^2 \text{ și atunci } A = \sqrt{1} + \sqrt{2^2} + \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} + \dots + \sqrt{n^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$A = 1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ și atunci } \sqrt{8A+1} = \sqrt{8 \frac{n(n+1)}{2} + 1} =$$

$$= \sqrt{4n^2 + 4n + 1} = \sqrt{(n+1)^2} = |n+1| = n+1, \text{ număr rațional } \dots\dots\dots 2p$$

b)

$$\sqrt{2A+1} = \sqrt{2 \frac{n(n+1)}{2} + 1} = \sqrt{n^2 + n + 1} \dots\dots\dots 1p$$

Arătăm că $n^2 + n + 1$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive; $n^2 < n^2 + n + 1 \Leftrightarrow$

$n+1 > 0$, adevărată pentru orice număr natural $\dots\dots\dots 1p$

$n^2 + n + 1 < (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n > 0$, adevărată pentru orice n număr natural nenul $\dots\dots\dots 1p$

În concluzie $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$ și atunci $n^2 + n + 1$ nu este pătrat perfect deci $\sqrt{2A+1} = \sqrt{n^2 + n + 1}$ este număr irațional pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \dots\dots\dots 1p$

2. Arătați că $\sqrt{2008 \cdot 2010 \cdot 2012 \cdot 2014 + 16} \in \mathbb{N}$

Soluție:

Fie $a = 2008$

$$\sqrt{a(a+2)(a+4)(a+6)+16} = \quad 1P$$

$$= \sqrt{(a^2+6a)(a^2+6a+8)+16} = \quad 2P$$

$$= \sqrt{(a^2+6a)^2+8(a^2+6a)+16} = \quad 2P$$

$$= \sqrt{(a^2+6a+4)^2} = a^2+6a+4 \in \mathbb{N} \quad 2P$$

3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, M este mijlocul muchiei CC' . Știind că $AB = 3cm$, $BC = \sqrt{15}cm$ și $AA' = 2cm$, aflați aria triunghiului $A'BM$ și distanța de la M la $A'B$.

Barem de corectare:

$$A'B = \sqrt{13}cm \quad 1p$$

$$BM = 4cm \quad 1p$$

$$A'M = 5cm \quad 1p$$

Aria $\Delta A'BM$ cu formula lui Heron:

$$A_{\Delta A'BM} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{9-\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}+1}{2}} = \sqrt{51} \quad 2p$$

$$A_{\Delta A'BM} = \frac{d(M,A'B) \cdot A'B}{2} \quad 1p$$

$$d(M,A'B) = \frac{2\sqrt{663}}{13} \quad 1p$$