OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2019
BAREM

CLASA VII-a

Subiectul I

a) $1+3+\cdots+(2n-1)=1+2+\cdots+2n-(2+4+\cdots+2n)=\frac{2n(2n+1)}{2}+$
$2(1+2+\cdots+n)=\frac{2n(2n+1)}{2}-\frac{2n(n+1)}{2}=n^2$ **3p**

b) $\sqrt{1}=1, \sqrt{1+3+5}=3, \ldots, \sqrt{1+3+\cdots+(4k+1)}=$
$\sqrt{1+3+\cdots+[2(2k+1)-1]}=\sqrt{(2k+1)^2}=2k+1$..**2p**
$2021=4\cdot 505+1=2\cdot 2011-1$,deci $\sqrt{1+3+\cdots+2021}=2011=2\cdot 506-1$
....**1p**
$A=1+3+5+\cdots+(2\cdot 506-1)=506^2$, adica A este pătrat perfect...**1p**

Subiectul II

(1)

Fie
$S=1+3+3^2+\cdots+3^{2017}$
$3S=3+3^2+3^3+\cdots+3^{2018}$...**1p**
$3S-S=3^{2018}-1$

$2S=3^{2018}-1$ **1p**

$S=1+3+3^2+\cdots+3^{2017}=\frac{3^{2018}-1}{2}$..**1p**

(2) Din

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\cdots=\frac{a_{2017}}{a_{2018}}=\frac{1}{3}$$

Avem

$a_2=3a_1$; $a_3=3a_2$;...; $a_{2018}=3a_{2017}$ adică **1p**

$a_2=3a_1$; $a_3=3^2a_1$;...; $a_{2018}=3^{2017}a_1$ **1p**

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2018}=1$

$a_1+3a_1+3^2a_1+\cdots+3^{2017}a_1=1$ **1p**

$a_1(1+3+3^2+\cdots+3^{2017})=1$

$a_1\frac{3^{2018}-1}{2}=1$

$a_1 = \frac{2}{3^{2018}-1}$

$a_{2018} = \frac{2\cdot 3^{2017}}{3^{2018}-1}$ ……………………………………………………………………**1p**

Subiectul III

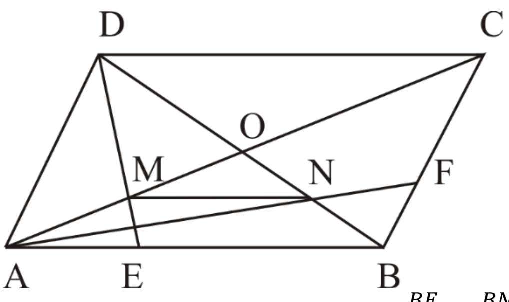
a) Cum $[AM] \equiv [NC]$ și AM paralelă cu NC, reiese că AMCN este paralelogram, deci mijlocul diagonalei$[AC]$, O, este și mijlocul lui $[MN]$. Așadar, M, O și N sunt coliniare……………………………………………………………………………………**3p**

b) În paralelogramul AMNC, triunghiul NOC este congruent cu triunghiul AOM și au ariile egale cu $\frac{1}{4}$ din aria paralelogramului (O mijlocul lui $[AC]$,deci aria triunghiului NOC este egală cu a triunghiului COM, deci jumatate din aria triunghiului MCN, care este congruent cu triunghiul AMN)………………………………………………………**2p**

Paralelogramele ABCD și AMCN pot fi privite ca având ca înălțime distanța dintre paralelele AB și CD, iar ca baze respectiv AB și AM. Reiese că raportul ariilor celor 2 paralelograme este $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$.………………………………………………………………**1p**

Aria triunghiului NOC este deci $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ din aria lui ABCD, adică este egală cu $2cm^2$………………………………………………………………………………………**1p**

Subiectul IV



Din BF || AD rezultă că Δ BFN ~ Δ DAN de unde se găsește $\frac{BF}{AD} = \frac{BN}{DN}$ de unde $\frac{BC-CF}{BC} = \frac{BN}{DN}$ relație care poate fi scrisă sub forma 1 - $\frac{CF}{BC} = \frac{BN}{DN}$ sau încă 1-$\frac{BN}{DN} = \frac{CF}{BC}$. **(1)**………………………**2p**

Din MN || BE rezultă, după teorema lui Thales, că $\frac{ME}{DM} = \frac{BN}{DN}$ ……………………………………………**1p**

Din AE || DC rezultă că ΔAME ~ ΔCMD de unde $\frac{AE}{DC} = \frac{ME}{DM}$ și ținînd seama și de relația de mai sus vom obține

$\frac{AE}{DC} = \frac{BN}{DN}$ și cum DC ≡ AB iar AE = AB – EB vom obține

$\frac{AB-EB}{AB} = \frac{BN}{DN}$ relație care se scrie sub forma 1-$\frac{EB}{AB} = \frac{BN}{DN}$ sau încă sub forma 1-$\frac{BN}{DN} = \frac{EB}{AB}$ **(2)**………………………………………………………………………………………**2p**

Din **(1)** și **(2)** rezultă că $\frac{CF}{BC} = \frac{EB}{AB}$ și cum BE ≡ CF rezultă că AB ≡ BC și prin urmare ABCD este romb………………………………………………………………………………………**2p**