



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 10.02.2024

Județul Buzău

CLASA a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Determinați primitiva $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{x-\frac{1}{x}}$, cu proprietatea că $F(1) = 2024$.

Subiectul 2 (7 puncte)

- a) Să se arate că $\forall x, y, z \in [0, 1)$ avem $\{\{x+y\}+z\} = \{x+y+z\}$,
- b) Pe mulțimea $G = [0, 1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \{x+y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a .
Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.
- c) Să se rezolve în $(G, *)$ ecuația $x * x * x = \frac{3}{4}$.

Subiectul 3 (7 puncte)

Considerăm $(S_4, \cdot)$ grupul permutărilor de gradul 4.

- a) Fie H un subgrup propriu al lui S_4 . Determinați numărul maxim de elemente din H .
- b) Fie $M = \{x \in S_4 \mid x^2 = e\}$. Demonstrați că M nu este subgrup al grupului $(S_4, \cdot)$.

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea:

$$x^2 \cdot f'(x) + x f(x) = 1, \quad \forall x > 0 \text{ și } f(1) = 0.$$

- a) Arătați că f admite primitive și determinați o primitivă F , a lui f dacă $F(1) = 0$.
- b) Calculați $\int_1^e \frac{F(x)}{x} dx$.

Timp de lucru 3 ore după primirea subiectelor.