

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a X-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Fie $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ și $B = \{c + d\sqrt[3]{2} \mid c, d \in \mathbb{Q}\}$. Calculați $A \cap B$.

(3p) b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $x \in (0, \infty)$. Demonstrați că $\sum_{k=2}^n k \cdot \sqrt[k]{x} \leq \frac{n-1}{2}(2x+n)$.

Soluție:

a) Vom demonstra că $A \cap B = \mathbb{Q}$ prin dubla incluziune. Evident $\mathbb{Q} \subseteq A$ și $\mathbb{Q} \subseteq B$, deci $\mathbb{Q} \subseteq A \cap B$

1 punct

Reciproc, fie $x \in A \cap B$. Atunci $x = a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt[3]{2} \Rightarrow d\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2} - c$ 1 punct

Prin ridicare la cub, obținem că $(a + b\sqrt{2} - c)^3 = (a - c)^3 + 3(a - c)^2 \cdot b\sqrt{2} + 6(a - c) \cdot b^2 + 2\sqrt{2} \cdot b^3 \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 3(a - c)^2 \cdot b\sqrt{2} + 2b^3\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3(a - c)^2 \cdot b + 2b^3 = 0 \Rightarrow b(3(a - c)^2 + 2b^2) = 0$ 1 punct

Dacă $b = 0 \Rightarrow x = a \in \mathbb{Q}$ și dacă $3(a - c)^2 + 2b^2 = 0 \Rightarrow a = c$ și $b = 0$, deci $x \in \mathbb{Q}$. Atunci $A \cap B \subseteq \mathbb{Q}$... 1 punct

b) Din inegalitatea mediilor deducem că $k \cdot \sqrt[k]{x} = k \cdot \sqrt[k]{x \cdot \underset{\text{de } k-1 \text{ ori}}{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}} \leq k \cdot \frac{x + \underset{\text{de } k-1 \text{ ori}}{1 + 1 + \dots + 1}}{k} = x + k - 1$... 2 puncte

Însumând, obținem

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k \cdot \sqrt[k]{x} &= \sum_{k=2}^n (x + k - 1) = (n-1)(x-1) + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(2x-2+n+2)}{2} = \frac{(n-1)(2x+n)}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

(selectată din problemele Concursului Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro de prof. Opreș Adonia-Augustina – inspector școlar)

PROBLEMA 2

(3p) a) Rezolvați inecuația $\log_4 x^2 + \log_{-x} 2 \leq 2$.

(4p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt[3]{x^2 - 2x + 3} - \sqrt[3]{2x^2 - 2x - 5} = \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt[3]{4x^2 - 5x - 1}$$

Soluție:

a) $x^2 > 0$, $-x > 0$ și $-x \neq 1$, de unde $x \in (-\infty, 0) - \{-1\}$ 1 punct

$$\log_4 x^2 = \log_4 (-x)^2 = \log_2 (-x) = a, \text{ inecuația este echivalentă cu}$$

$$a + \frac{1}{a} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \leq 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ sau } a < 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\log_2 (-x) = 1 \text{ sau } \log_2 (-x) < 0 \text{ de unde, } x = -2 \text{ sau } -x \in (0, 1) \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup \{-2\}$$

$$S = \{(-1, 0) \cup \{-2\}\} \cap \{(-\infty, 0) \cup \{-1\}\} = (-1, 0) \cup \{-2\} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

(autor prof. Fărcaș Nicolae – Colegiul Național "Silvania" Zalău)

b) Notăm: $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 3} = m$; $\sqrt[3]{4x^2 - 5x - 1} = n$; $\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 7} = p$ și $\sqrt[3]{2x^2 - 2x - 5} = q$

Atunci avem

$$\begin{cases} m+n=p+q \\ m^3+n^3=p^3+q^3 \end{cases} (1p) \Rightarrow \begin{cases} m+n=p+q \\ (m+n)^3 - 3mn(m+n) = (p+q)^3 - 3pq(p+q) \end{cases} \Rightarrow mn(m+n) = pq(p+q) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

I. Dacă $m+n=p+q=0 \Rightarrow p=-q \Rightarrow 5x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{5} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

II. Dacă $m+n=p+q \neq 0 \Rightarrow mn=pq \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 2x - 5} = \frac{3x^2 - 5x + 7}{4x^2 - 5x - 1} (1p) \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 8} = \frac{3x^2 - 5x + 7}{x^2 - 8} \Rightarrow (x^2 - 8) \cdot (2x^2 - 3x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 1) x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{și } 2) 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x_{3,4} \notin R \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Deci $x \in \left\{-2\sqrt{2}, \frac{2}{5}, 1, 2\sqrt{2}\right\} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

(problemă propusă de prof. Bara Lajos - Liceul Reformat "Wesselényi" Zalău)

PROBLEMA 3

Să se determine toate funcțiile $f, g: R \rightarrow R$ care verifică condițiile:

i) g este injectivă,

ii) $f(g(x)+y) = g(x+f(y))$ pentru $\forall x, y \in R$.

Soluție:

Pentru $x=0 \Rightarrow f(g(0)+y) = g(f(y)) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Înlocuim y cu x și obținem: $g(f(x)) = f(x+b)$, unde $b = g(0)$ (1) $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Pentru $y=0 \Rightarrow f(g(x)) = g(x+f(0)) \Rightarrow f(g(x)) = g(x+a)$, unde $a = f(0)$ (2) $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Din (1) și (2) rezultă

$g(g(x+a)) = g(f(g(x))) = (g \circ f)(g(x)) \stackrel{(1)}{=} f(g(x)+b) \stackrel{i)}{=} g(x+f(b))$ și g fiind injectivă, rezultă că $g(x+a) = x+f(b)$ 2 puncte

schimbăm variabila: $x = x-a \Rightarrow g(x) = x-a+f(b) \Rightarrow g(x) = x+c, c = f(b)-a, \forall x \in R$ 1 punct

Atunci din relația (2) $\Rightarrow f(g(x)) = f(x+c) = g(x+a) = (x+a)+c = g(x)+a \Rightarrow f(x) = x+a, \forall x \in R$

$c = f(b)-a = b+a-a = b \Rightarrow g(x) = x+b, \forall x \in R$ 1 punct

(problemă propusă de prof. Zay Eva – Colegiul Național "Silvania" Zalău)

PROBLEMA 4

(4p) a) Să se determine valoarea minimă a modulului unui număr complex z pentru care are loc relația $|z-3i| + |z-4| = 5$.

(3p) b) Să se arate că dacă $a \in C-R$ este o rădăcină a ecuației $z^3 = 1$ atunci $(2+5a+2a^2)^6 \in Z$.

Soluție:

a) Se consideră în planul complex punctele $A(3i) \in Oy, B(4) \in Ox, M(z)$ și atunci relația $|z-3i| + |z-4| = 5$ devine $AM + MB = AB$ adică $M \in AB$ 2 puncte

Cerința problemei de a determina valoarea minimă a modulului numărului complex z este echivalentă cu condiția de a determina distanța minimă de la punctul $M \in AB$ la punctul O 1 punct

Distanța minimă OM se obține atunci când OM este înălțime în triunghiul OAB , deci valoarea minimă pentru $|z|$ este $\frac{12}{5}$ 1 punct

(problemă propusă de prof. Hrițcu Costel-Iulian – Liceul Tehnologic "Gheorghe Pop de Băsești" Cehu Silvaniei)

b) $z^3 = 1 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$ de unde avem $a^3 = 1$. Deoarece $a \in C-R \Rightarrow a^2+a+1 = 0$,

$a^2 = -a-1$... 2 puncte

$(2+5a+2a^2)^6 = (2+5a-2a-2)^6 = (3a)^6 = 3^6 \cdot a^6 = 3^6 \cdot (a^3)^2 = 3^6 \cdot 1^2 = 3^6 \in \mathbb{Z}$... 1 punct

(problemă propusă de prof. Fărcaș Nicolae – Colegiul Național "Silvania" Zalău)