R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a IX-a

PROBLEMA 1

Demonstraţi că sirul $(a_n)_{n\in N^*}$ *este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă:*

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \quad + 2a_{n-1} + a_n = (n-1)(a_1 + a_n), \forall n \in N, n \geq 3.$$

PROBLEMA 2

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\{x\} - \{2014\mathrm{x}\} = x$.

PROBLEMA 3

Arătaţi că:

a) $x^3 - 3x + 2 \geq 0, \forall x \in [0,\infty)$

b) Dacă $a,b,c \in (0,\infty)$ *şi* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$ *, atunci* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

PROBLEMA 4

Pe cercul $\mathcal{C}$ *de centru O se consideră punctele distincte A, B, C. Demonstraţi că dacă* $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}|$ *atunci* $AB = BC = CA.$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a X-a

PROBLEMA 1

Rezolvaţi ecuaţia $2^{2^x-1}-1=\log_2(1+x)$.

PROBLEMA 2

Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2\sin 2x+8(\sin x+\cos x)+3.$

Determinaţi imaginea funcţiei f .

PROBLEMA 3

Fie $n\geq 2$ *număr natural şi* a,b *două numere reale pozitive. Să se arate că* $n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\leq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+n-2\right)$.

PROBLEMA 4

Notăm cu M,N,P,Q,R *şi* S *mijloacele segmentele* $(BC),(CD),(DE),(EA),(MP)$ *respectiv* (NQ) *dintr-un pentagon convex* $ABCDE$. *Arătaţi că* $RS\parallel AB$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a XI-a

PROBLEMA 1

Fie $X \in M_3(C)$, $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. *Să se calculeze* $X^n, n \in N$.

PROBLEMA 2

Notăm cu $M = \{X \in M_2(R) \mid X^2 - X - 6I_2 = O_2\}$. Demonstraţi că:

a) Dacă $A \in M \Rightarrow$ A este inversabilă şi $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I_2)$

b) Dacă A, B $\in M \Rightarrow A^n - B^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n + 3^n}{5} \cdot (A - B)$

PROBLEMA 3

a) Să se determine $m \in R$, *astel încât* $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(m-1)^2 \cdot x^2 + 1}}{3x + 2} = -1$.

b) calculaţi limita: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^n + x^{n-1} + ... + x + 1)}{nx}$, $n \in N^*$.

PROBLEMA 4

Fie şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ *definit prin* $a_1 = 1$ *şi* $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$, $n \geq 1$. *Să se calculeze*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + ... + \frac{n}{a_n}\right).$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a XII-a

PROBLEMA 1

Fie $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ *şi* $G=\{A(m)|m\in\mathbb{Z}\}$.

- ***a)*** *Arătaţi că* $(G,\cdot)$ *este grup*
- ***b)*** *Arătaţi că* $(G,\cdot)$ *este izomorf cu grupul* $(Z,+)$
- ***c)*** *Rezolvaţi ecuaţia* $(A(m))^n = A(5), m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$.

PROBLEMA 2

Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *definită prin* $f(x)=\begin{cases}\sin\left(ax+\dfrac{b}{x^2}\right), & \text{dacă } x\neq 0\\ 0 & \text{, dacă } x=0\end{cases}$

are primitive pe ***R***, *pentru orice* $a,b\in\mathbb{R}$.

PROBLEMA 3

Determinaţi primitivele funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x^2-2x)^4+4}$

PROBLEMA 4

Fie $(G,\cdot)$ *un grup şi* $f:G\to G$ *o funcţie injectivă astfel încât* $f(x^2\cdot f(y))=x^{-1}\cdot f(xy),\forall x,y\in G$. *Să se arate că* $x^2=e,\forall x\in G$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.