



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

17 februarie 2018

Clasa a XI-a

1. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

Să se calculeze:

a) $AB, BA, AC, CA;$

b) $\sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} \left((-1)^{n-k} B^{n-k} - (-1)^k C^k \right).$

2. Dacă $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ și $A+B=AB$, arătați că A este inversabilă dacă și numai dacă B este inversabilă.

3. Calculați:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n!},$ unde $p \in \mathbb{N}^*;$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{n+2m}^m}{A_{n+m}^m} \right)^n,$ unde $m \in \mathbb{N}, m$ fixat.

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq k},$ unde $n^{x_n} = n + 1.$

a) Să se determine valoarea minimă $k \in \mathbb{N},$ pentru care șirul este bine definit.

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq k}$ este monoton și mărginit.

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.