



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală , SĂLAJ , 11.02.2023

Clasa a IX-a

BAREM DE NOTARE

Subiectul 1

Demonstrați că, pentru orice numere reale a, b, c , avem:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 1 \geq 2(a + b + c).$$

Barem de corectare:

Înmulțind cu 3 inegalitatea din enunț, obținem:.....2p

$$9a^2 + 9b^2 + 9c^2 + 3 \geq 6a + 6b + 6c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - 6a + 1 + 9b^2 - 6b + 1 + 9c^2 - 6c + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow (3a - 1)^2 + (3b - 1)^2 + (3c - 1)^2 \geq 0. \dots\dots\dots 2p$$

Inegalitatea obținută este evident adevărată, egalitatea având loc pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$ **1 punct**

Subiectul 2

a) Să se arate că numărul $A = \left[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right], n \in \mathbb{N}$ este impar.

b) Să se rezolve ecuația:

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] + \left[2x + \frac{1}{2} \right] + \dots + \left[2^{n-1}x + \frac{1}{2} \right] = 2003, n \in \mathbb{N}, n \geq 11.$$

Barem de corectare:

a) $A = 2n + 1 + \left[2\sqrt{n(n+1)} \right] \dots\dots\dots 1p$

$$2n < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$A = 4n + 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \text{ număr impar} \dots\dots\dots 1p$$

b) $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x] \quad (\text{Hermite, } n=2) \dots\dots\dots 1p$

$$\text{Obținem ecuația } [2^n \cdot x] - [x] = 2003$$

$$[2^n \cdot x] = 2003 + [x] \dots\dots\dots 1p$$

$$2003 + [x] \leq 2^n \cdot x < 2004 + x$$

$$(2^n - 1) \cdot x < 2004 \dots\dots\dots 1p$$

$$0 < x < \frac{2004}{2^n - 1} \leq \frac{2004}{2^{11} - 1} < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

$$\Rightarrow [2^n \cdot x] = 2003 \Rightarrow x \in \left[\frac{2003}{2^n}, \frac{2004}{2^n} \right) \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3

Determinați numerele naturale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$ care verifică relația:

$$a_1^2 + 2 \cdot a_2^2 + \dots + n \cdot a_n^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Barem de corectare:

$$n = 2 \Rightarrow a_2 \cdot (a_2 - 2a_1) = 0 \Rightarrow a_2 = 2a_1$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 \cdot (a_3 - 3a_1) = 0 \Rightarrow a_3 = 3a_1$$

$$a_n = n \cdot a_1, n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$$

$a_n = n \cdot a_1, n \in \mathbb{N}^*$ demonstrație prin inducție matematică:

$P(k) \rightarrow P(k+1), k \in \mathbb{N}^*, k$ oarecare *Tastați ecuația aici.*

$$a_1^2 + 2^3 a_1^2 + \dots + k^3 a_1^2 + (k+1) \cdot a_{k+1}^2 = (a_1 + 2a_1 + \dots + k \cdot a_1 + a_{k+1})^2 \dots\dots 2p$$

$$\frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} \cdot a_1^2 + (k+1) \cdot a_{k+1}^2 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2} \cdot a_1 + a_{k+1} \right)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$k \cdot a_{k+1}^2 = k \cdot (k+1) \cdot a_1 \cdot a_{k+1}$$

$$a_{k+1} = (k+1) \cdot a_1 \dots\dots\dots 1p$$

Deci $a_n = n \cdot a_1, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \alpha \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = n \cdot \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 4

Se consideră triunghiul ABC, iar punctele M și N în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, iar $\overrightarrow{CN} = q\overrightarrow{CB}$, unde $q > 0$.

(3p) a) Demonstrați că : $\overrightarrow{AN} = (1-q)\overrightarrow{AC} + q\overrightarrow{AB}$

(4p) b) Determinați $q > 0$ astfel încât punctele A, M, N să fie colineare.

Barem de corectare:

a) Folosind regula triunghiului în $\triangle ANC$ obținem $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ 1p

de unde folosind faptul că $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$, obținem $\overrightarrow{AN} = (1 - q)\overrightarrow{AC} + q\overrightarrow{AB}$ 2p

b) Punctele A, M, N sunt colineare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}$ coliniari, $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*$ a. î. $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM}$ 1p

Obținem astfel că: $(1 - q)\overrightarrow{AC} + q\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} + 2k\overrightarrow{AB}$1p

De unde: $1 - q = k$ și $q = 2k$, deci $k = \frac{1}{3}$ și $q = \frac{2}{3}$ 2p