



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020**

Barem - Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Se arată că $AB - BA = \alpha \cdot I_3$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 3p

$Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$ și $Tr(\alpha I_3) = 3\alpha \Rightarrow 0 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow AB = BA$ 4p

SUBIECTUL II

Presupunem că $p \neq q$. Înmulțim stânga/dreapta cu A în $p \cdot AB + q \cdot BA = I_n \Rightarrow pABA + qBA^2 = A$ și $pA^2B + qABA = A$ 2p

Dar $A^2 = r \cdot B^2 \Rightarrow pABA + qrB^3 = A$, $prB^3 + qABA = A \Rightarrow (p - q)ABA = (p - q)rB^3$ 2p

Din $p \neq q \Rightarrow ABA = rB^3$ 1p

Din $pABA + qBA^2 = A$ deducem $prB^3 + qrB^3 = A$ adică A și B comută, contradicție! 2p

SUBIECTUL III

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ definit prin $a_n = \sqrt[n]{n!} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt[n]{2020} \right)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt[n]{2020}}{\arctg \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt[n]{2020} \right)} \cdot \arctg \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt[n]{2020} \right) \sqrt[n]{n!} = \dots \dots \dots 2p$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt[n]{2020}}{1 + \sqrt[n]{2020}} \sqrt[n]{n!} = \frac{-1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dots \dots \dots 2p$$

$$= \frac{-1}{2} \ln 2020 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = -\frac{\ln 2020}{2e} \dots \dots \dots 1p$$

Am folosit criteriul rădăcinii pentru $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$: $\frac{(n+1)!}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$ 2p

SUBIECTUL IV

Soluție: Există două cazuri:

Caz I $(\exists) n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a_n > \frac{1}{n}$, $\forall n \geq n_0$ 3p

Caz II $(\forall) k \in \mathbf{N}^*$, $(\exists) n \geq k$ astfel încât $a_n \leq \frac{1}{n}$ 4p

Caz I $a_n > \frac{1}{n}$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \max \left\{ a_n, \frac{1}{n} \right\} = a_n$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$ și $a_n \geq 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 0}$ convergent
 $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ convergent .

Caz II Demonstrăm că $a_n \rightarrow 0$.

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $(\exists) n_0 \geq k$ astfel încât $a_{n_0} \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Demonstrăm prin inducție $a_n \leq \frac{1}{n_0}, (\forall) n \geq n_0$. Etapa I) $P(n_0): a_{n_0} \leq \frac{1}{n_0}$, adevărat.

Etapa II) $a_{n+1} \leq \max\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow a_n \leq \frac{1}{n_0}$, dar $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \Rightarrow \max\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} \leq \frac{1}{n_0} \Rightarrow a_{n+1} \leq \frac{1}{n_0}$. Atunci $a_n \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.