



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1.

(2p) a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, atunci $\det(A) = a^2 + b^2$. Cum $x^2 \in \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4}\}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$, obținem că $a^2 + b^2 = \widehat{0} \Leftrightarrow a = b = \widehat{0}$, adică $A = O_2$

(2p) b) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}$ și $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}$, atunci

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \in G.$$

Din $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq \widehat{0}$, obținem că $A \cdot B \neq O_2$, adică $A \cdot B \in G \setminus \{O_2\}$

(1p) c) Observăm că $(G \setminus \{O_2\}, \cdot)$ este un grup finit de ordinul 48.

$$\left(\text{elementul neutru este } I_2, \text{ și } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\} \right)$$

(2p) Așadar, $X^{48} = I_2, \forall X \in G \setminus \{O_2\}$.

Matricea $B = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ satisface relația $B^4 = -I_2$

Astfel, dacă $X \in G \setminus \{O_2\}$, și $X^{12} = B \Rightarrow X^{48} = B^4 \Rightarrow I_2 = -I_2$ Contradicție.

Deci, ecuația dată nu are soluții în mulțimea G .

PROBLEMA 2.

Fie $x, y \in G$.

(1p) Dacă cel puțin unul dintre x și y este din $Z(G)$, atunci $xy = yx$.

Dacă $x, y \in G \setminus Z(G)$, atunci $x^2 = y^2 = e$ și avem următoarele cazuri:

(3p) dacă $xy \in Z(G) \Rightarrow x(xy)y = (xy)xy = x(yx)y \Rightarrow xy = yx$

(3p) dacă $xy \notin Z(G) \Rightarrow x^2y^2 = (xy)^2 = e \Rightarrow x(xy)y = x(yx)y \Rightarrow xy = yx$

PROBLEMA 3.

$$(2p) \quad f(e^t) = \begin{cases} e^t, & \text{dacă } t \leq 0 \\ e^t - 1, & \text{dacă } t > 0 \end{cases}; f(e^{-t}) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{dacă } t \geq 0 \\ e^{-t} - 1, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$$

$$(2p) \quad \text{Pentru } t \in [0, 1], \text{ avem } g(t) = \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ e^{2t} - e^t, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

(2p) Funcția $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită și continuă pe $(0, 1]$, deci este integrabilă și

$$\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} dt = \int_0^1 (e^{2t} - e^t) dt$$

$$(1p) \quad \int_0^1 (e^{2t} - e^t) dt = \frac{1}{2} (e - 1)^2$$

PROBLEMA 4.

(2p) Prin descompunerea funcției raționale $f(x) = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2}$ în fracții raționale simple, obținem $f(x) = A(x) + \frac{px+q}{1+x^2}$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$.

(1p) Din $(1+x)^n + (1-x)^n = (1+x^2) \cdot A(x) + px + q$, obținem

$$\begin{cases} (1+i)^n + (1-i)^n = p \cdot i + q \\ (1-i)^n + (1+i)^n = -p \cdot i + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = (1-i)^n + (1+i)^n \end{cases}$$

$$(1p) \quad q = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n + \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n = 2 (\sqrt{2})^n \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$(1p) \quad \text{Avem } I_n = \int_0^1 A(x) dx + \int_0^1 \frac{q}{1+x^2} dx,$$

$$(1p) \quad \text{unde } \int_0^1 A(x) dx \in \mathbb{Q} \text{ și } \int_0^1 \frac{q}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$$

(1p) Așadar, $I_n \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{q}{1+x^2} dx \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \cos \frac{n\pi}{4} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \cos \frac{n\pi}{4} = 0$, de unde obținem că $n \in \{4k+2 : k \in \mathbb{N}\}$.

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.