

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
18 februarie 2018

CLASA a IX-a

1. a) (3p) Demonstrați că, pentru orice trei numere reale a, b, c , are loc inegalitatea:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

b) (4p) Fie x, y, z trei numere reale cu proprietatea $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Să se arate că:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + yz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + xz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + xy + 3}} \geq 1.$$

2. (7p) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{n+2017}{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor}$ și $\frac{n+2018}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ sunt numere naturale.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, definită prin:

$$f(1)=1 \text{ și } f(n)=\begin{cases} f(n-1)+2n-1, & \text{dacă } n \geq 2, n \text{ număr par} \\ f(n-2)+4n-4, & \text{dacă } n \geq 3, n \text{ număr impar} \end{cases}.$$

(5p) a) Calculați $f(2017)$;

(2p) b) Găsiți o funcție $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care satisface $g \circ f = 1_{\mathbb{N}^*}$ și $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}^*}$, unde $1_{\mathbb{N}^*}$ reprezintă funcția identică a mulțimii $\mathbb{N}^*$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare, M mijlocul laturii $[BC]$ și D, E, F trei puncte coliniare astfel încât $D \in (AB), E \in (AM), F \in (AC)$.

(4p) a) Să se arate că E este mijlocul segmentului $[DF] \Leftrightarrow DF \parallel BC$;

(3p) b) Dacă $AD = \frac{2}{5}AB$ și E este mijlocul segmentului $[AM]$, atunci $BE \parallel MF$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.