

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A VII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Arătați că $\sqrt{(1+2+3+\dots+n)^2 + (n+1)^3}$ este număr rațional, pentru orice n număr natural.

Gazeta Matematică

Soluție:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3} = \sqrt{(n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right)} = \dots\dots\dots 4p$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$$

2. Fie $ABCD$ un paralelogram și $AC \cap BD = \{O\}$. Construim pătratele $AOPQ$ și $DOST$ astfel încât Q și T de o parte și de alta a dreptei BD . Dacă Q, O, T coliniare, atunci demonstrați că $ABCD$ este romb.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

$$m(\angle AOQ) = 45^\circ, m(\angle DOT) = 45^\circ, m(\angle TOQ) = 180^\circ \dots\dots\dots 3p$$

$$m(\angle AOD) = 90 \Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow ABCD \text{ romb} \dots\dots\dots 4p$$

3. Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{ab2}$, $\overline{bc7}$ și $\overline{ca8}$ este egal cu 3, atunci demonstrați că $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ este un număr irațional.

Adelina Ion, Brăila

Soluție:

Din $(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}) = 3$, rezultă $\overline{ab} = M_3 + 1$, $\overline{bc} = M_3 + 2$, $\overline{ca} = M_3 + 1$ 2p

Cazul I: Dacă $a = M_3 \Rightarrow b = M_3 + 1, c = M_3 + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = M_3 + 2 \neq$ pătrat perfect.....3p

Cazurile II și III: $a = M_3 + 1$ și $a = M_3 + 2$ se tratează analog, obținând de fiecare dată $a^2 + b^2 + c^2 = M_3 + 2 \neq$ pătrat perfect.....2p

4. Se consideră punctul M pe latura (BC) a triunghiului ABC . Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, AMB, AMC , atunci demonstrați că centrele de greutate ale triunghiurilor AG_1M, AG_2M, AG_3M sunt coliniare.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

Fie P_1, P_2, P_3 mijloacele segmentelor BC, BM, CM

Din $\frac{AG_1}{G_1P_1} = \frac{AG_2}{G_2P_2} = \frac{AG_3}{G_3P_3} = 2 \Rightarrow G_1G_2 \parallel G_1G_3 \parallel BC$, deci G_1, G_2, G_3 sunt coliniare2p

Fie Q mijlocul lui $[AM]$ și R_1, R_2, R_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AG_1M, AG_2M , respectiv AG_3M , de unde $\frac{G_1R_1}{R_1Q} = \frac{G_2R_2}{R_2Q} = \frac{G_3R_3}{R_3Q} = 2$ 3p

Obținem $R_1R_2 \parallel G_1G_2$ și $R_1R_3 \parallel G_1G_3$, deci R_1, R_2, R_3 sunt coliniare2p