

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a X-a

Subiecte:

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x(2^{2013}) \cdot \log_x(2^{2014})}$$

- a) Să se calculeze $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
b) Să se arate că f nu este injectivă.
c) Să se rezolve ecuația $f(x) = \frac{4026}{1007}$.

2. Să se rezolve ecuația $5^x = 3^{x+\{x\}}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a .

Prof. Burtea Marius, Alexandria

3. Se consideră în mulțimea numerelor complexe ecuațiile $x^{19} = -i$ și $y^{53} = i$

- a) Calculați $(a \cdot b)^{2014}$ unde a este o soluție a uneia dintre ecuații iar b o soluție a celeilalte ecuații.
b) Aflați soluțiile comune ale celor două ecuații.

Prof. Voiculeț Septimius, Videle

4. Să se arate că $2^x + 3^{-x} + 4^{-x} + 6^x \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
Pentru ce valori ale lui x se realizează egalitatea?