

Barem de corectare

1. a)	a) Inegalitatea se scrie $(\lg x + \lg y)^2 \leq 2(\lg^2 x + \lg^2 y) \Leftrightarrow (\lg x - \lg y)^2 \geq 0$	3 p
	Notând $\lg x = a, \lg y = b, \lg z = c, \lg t = d$, rezultă că $a, b, c, d \in (0, \infty)$ și $(a+b)\sqrt{cd} + (c+d)\sqrt{ab} = 4$. Inegalitatea de demonstrat devine $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$. (*)	1 p
1. b)	Folosind inegalitățile $u+v \leq \sqrt{2(u^2+v^2)}$ și $\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2} \leq \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}$ valabile $\forall u, v \geq 0$, rezultă	1 p
	$4 = (a+b)\sqrt{cd} + (c+d)\sqrt{ab} \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \sqrt{\frac{c^2+d^2}{2}} + \sqrt{2(c^2+d^2)} \sqrt{\frac{a^2+d^2}{2}}$	
	Rezultă $4 \leq 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \leq (a^2+b^2) + (c^2+d^2)$, adică relația (*) are loc.	2 p
TOTAL Subiectul 1		7 p
2.	Alegem originea sistemului în O, centrul cercului circumscris hexagonului și notăm cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor considerate.	1 p
	Cum H_1, H_2, H_3, H_4 sunt respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, DEF, EFA , aplicând teorema lui Silvester, scrisă în complex, rezultă $h_1 = a + b + c$ și analoagele $h_2 = b + c + d, h_3 = d + e + f, h_4 = e + f + a$.	2 p
	Din aceste relații avem: $h_1 + h_3 = a + b + c + d + e + f$ (1)	1 p
	$h_2 + h_4 = a + b + c + d + e + f$	1 p
	Din (1) și (2) obținem că $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$, de unde rezultă că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.	2 p
	TOTAL Subiectul 2	7 p
3. a)	Funcția f este strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare	1 p
	Rezultă că f este injectivă	1 p
3. b)	Se impun condițiile: $x \geq 0, 2014 - x \geq 0$ și $\frac{2014}{x} - 1 > 0$. Rezultă $x \in (0, 2014) = D$.	1 p
	Din $\sqrt[6]{x\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{4}}$ rezultă $\sqrt[6]{(2014-x)\sqrt{2014-x}} = (2014-x)^{\frac{1}{4}}$ (1) Dar $\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{7}} \cdot x^{\frac{1}{14}} \cdot x^{\frac{1}{28}} = x^{\frac{1}{4}}$ (2)	1 p

	Folosind relațiile (1) și (2) ecuația devine $x^{\frac{1}{4}} - (2014 - x)^{\frac{1}{4}} = \log_{2015}(2014 - x) - \log_{2015} x \Leftrightarrow$ $\sqrt[4]{x} + \log_{2015} x = \sqrt[4]{2014 - x} + \log_{2015}(2014 - x) \quad (3)$ Funcția $f : (0, 2014) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt[4]{t} + \log_{2015} t$ este strict crescătoare și deci este injectivă Ecuția (3) se scrie echivalent $f(x) = f(2014 - x)$ și cum f este injectivă rezultă că $x = 2014 - x \Leftrightarrow x = 1007 \in D$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{1007\}$. TOTAL Subiectul 3	1 p 1 p 1 p 7 p
4. a)	Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = z ^2$. Cum $z ^2 = z \cdot \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, inegalitatea se scrie $9 z_1 + z_2 ^2 \geq 5z_1 + z_2 ^2 \Leftrightarrow 9(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \geq (5z_1 + z_2)(5\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow$ $9(z_1 ^2 + z_2 ^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \geq 25 z_1 ^2 + z_2 ^2 + 5(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \Leftrightarrow$ $0 \geq 16 z_1 ^2 - 8 z_2 ^2 - 4\bar{z}_1 z_2 - 4z_1 \bar{z}_2 \Leftrightarrow 0 \geq 4 z_1 ^2 - 2 z_2 ^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 \quad (*)$ Deoarece din ipoteză avem $z_1 = z_2$, inegalitatea (*) se scrie echivalent	2 p 2 p
4. b)	$0 \geq 2 z_1 ^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 \Leftrightarrow 0 \geq z_1 ^2 + z_2 ^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 0 \Leftrightarrow$ $ z_1 - z_2 ^2 \leq 0$ Din ultima relație rezultă că $z_1 - z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$. TOTAL Subiectul 4	2 p 1 p 7 p

Subiecte propuse de prof. Tămăian Traian – Liceul Teoretic Carei