

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 22 februarie 2020

Subiect clasa a VIII-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Determinați numerele raționale m, n cu $n \neq 0$ astfel încât $m + n\sqrt{7} = \frac{b}{a}$, unde $a = \sqrt{9 + \sqrt{29 - 4\sqrt{7}}}$

și $b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8 - 3\sqrt{7}}$.

(3p) b) Determinați numerele întregi a și b pentru care $a^2 + b^2 = b - 5a$.

PROBLEMA 2

(4p) a) Se consideră expresiile $E_1(x) = 2011 + 18x - x^2$ și $E_2(x) = \frac{4x^2 - 20x + 26}{4x^2 - 20x + 27}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Determinați valoarea maximă a expresiei $E_1(x)$ și valoarea minimă a expresiei $E_2(x)$.

(3p) b) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale pozitive care verifică relația $a + \frac{a}{b} + b + \frac{b}{a} = 2020$

atunci, $ab \leq 1018081$.

PROBLEMA 3

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, $(AB) \equiv (AC)$ și $E \in (AB), F \in (AC)$ astfel încât $(AE) \equiv (CF)$. Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (AD) și (EF) este paralelă cu planul (BCD) .

PROBLEMA 4

Fie trei semidrepte $(OA), (OB), (OC)$ necoplanare.

(3p) a) Dacă $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ și $OH \perp (ABC)$, atunci H este ortocentrul $\triangle ABC$.

(4p) b) Dacă $m(\angle AOB) = m(\angle BOC) = m(\angle COA) = 60^\circ$ și $AO = a$ cm, calculați lungimea AQ , unde $AQ \perp (OBC), Q \in (OBC)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a VIII-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Determinați numerele raționale m, n cu $n \neq 0$ astfel încât $m + n\sqrt{7} = \frac{b}{a}$, unde $a = \sqrt{9 + \sqrt{29 - 4\sqrt{7}}}$

și $b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8 - 3\sqrt{7}}$.

(3p) b) Determinați numerele întregi a și b pentru care $a^2 + b^2 = b - 5a$.

Soluție:

$$a) \quad a = \sqrt{9 + \sqrt{29 - 4\sqrt{7}}} = \sqrt{9 + (2\sqrt{7} - 1)} = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8 - 3\sqrt{7}} = \sqrt{16 - 6\sqrt{7}} = |3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{7} + 1} = \frac{4\sqrt{7} - 10}{6} = \frac{2\sqrt{7} - 5}{3} \dots\dots\dots 1$$

punct

$$m = -\frac{5}{3}; n = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

(propusă de prof. Știrb Ramona – Liceul de Artă "Ioan Sima" Zalău)

b) Înmulțind relația cu 4, obținem $4a^2 + 4b^2 - 4b + 20a = 0 \Leftrightarrow (2a + 5)^2 + (2b - 1)^2 = 26 \dots\dots 1 \text{ punct}$

Cum a și b sunt numere întregi, avem

$$\begin{cases} (2a + 5)^2 = 1 \\ (2b - 1)^2 = 25 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} (2a + 5)^2 = 25 \\ (2b - 1)^2 = 1 \end{cases} \dots\dots 1 \text{ punct}$$

Obținem soluțiile $(-2, 3), (-2, -2), (-3, 3), (-3, -2), (0, 1), (0, 0), (-5, 1), (-5, 0) \dots\dots 1 \text{ punct}$

(problemă selectată din G.M., nr.10/2018)

PROBLEMA 2

(4p) a) Se consideră expresiile $E_1(x) = 2011 + 18x - x^2$ și $E_2(x) = \frac{4x^2 - 20x + 26}{4x^2 - 20x + 27}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Determinați valoarea maximă a expresiei $E_1(x)$ și valoarea minimă a expresiei $E_2(x)$.

(3p) b) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale pozitive care verifică relația $a + \frac{a}{b} + b + \frac{b}{a} = 2020$ atunci, $ab \leq 1018081$.

Soluție:

a) Scrie $E_1(x) = 2011 + 18x - x^2$ $E_1(x) = 2092 - (x-9)^2$ 1 punct

Expresia are valoarea maximă dacă $(x-9)^2 = 0 \Rightarrow \max E_1(x) = 2092$ 1 punct

$E_2(x) = \frac{4x^2 - 20x + 26}{4x^2 - 20x + 27} = \frac{4x^2 - 20x + 27 - 1}{4x^2 - 20x + 27} = 1 - \frac{1}{2 + (2x-5)^2}$ 1 punct

Expresia are valoarea minimă dacă $(2x-5)^2 = 0 \Rightarrow \min E_2(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 1 punct

b) Aplicând inegalitatea mediilor avem $2020 = (a+b) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2\sqrt{ab} + 2$ 2 puncte

De unde rezultă că $\sqrt{ab} \leq 1009 \Leftrightarrow ab \leq 1018081$ 1 p

(problemă propusă prof. Gornoavă Valeriu - Colegiul Național "Silvania" Zalău)

PROBLEMA 3

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, $(AB) \equiv (AC)$ și $E \in (AB), F \in (AC)$ astfel încât $(AE) \equiv (CF)$. Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (AD) și (EF) este paralelă cu planul (BCD) .

Soluție:

Fie M, N mijloacele segmentelor (EF) , respectiv (AD) și $EP \parallel AC, P \in BC$.

$\widehat{EPB} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{ABC}$, deci $\triangle EPB$ este isoscel, cu $(EP) \equiv (BE)$ 2 punct

Dar $BE = AB - AE = AC - CF = AF$, deci $(EP) \equiv (AF)$ 1 punct

Atunci $\triangle AMF \equiv \triangle PME$, deci $\widehat{AMF} \equiv \widehat{EMP}$ și $(AM) \equiv (MP)$ 1 punct

Rezultă A, M, P coliniare, iar M este mijlocul segmentului (AP) 1 punct

Obținem că (MN) este linie mijlocie în $\triangle ADP$, deci $MN \parallel DP$ 1 punct

Deoarece M nu aparține planului (BCD) și $DP \subset (BCD)$, rezultă $MN \parallel (BCD)$ 1 punct

(problemă propusă de prof. dr. Mangra Dana Maria- Școala Gimnazială Nr. 1 Buciumi)

PROBLEMA 4

Fie trei semidrepte $(OA), (OB), (OC)$ necoplanare.

(3p) a) Dacă $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ și $OH \perp (ABC)$, atunci H este ortocentrul $\triangle ABC$.

(4p) b) Dacă $m(\angle AOB) = m(\angle BOC) = m(\angle COA) = 60^\circ$ și $AO = a$ cm, calculați lungimea AQ , unde $AQ \perp (OBC), Q \in (OBC)$.

Soluție:

a) Dacă $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. Dar $BC \perp OA$ ($OA \perp (OBC) \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC$2 puncte

Identic arătăm că $CH \perp AB$, deci H este ortocentrul $\triangle ABC$1punct

b) Dacă $AQ \perp (BOC)$ și $QD \perp OB \Rightarrow AD \perp OB$1punct

Dacă $AQ \perp (OBC)$ și $QE \perp OC \Rightarrow AE \perp OC$1punct

$\triangle AOD \equiv \triangle AOE \Rightarrow OD = OE$1punct

$\triangle QOD \equiv \triangle QOE \Rightarrow OD = OE = \frac{a}{2} \Rightarrow OQ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AQ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$1punct

(propusă de prof. Cosma Dorin- Școala Gimnazială "Porolissum" Zalău)