

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**
FAZA LOCALĂ 18.02.2019**Clasa a IV-a****Problema 1.**

(4p) a) Calculați : $20 + \{250 : 5 + 15 : 3 \cdot [10 - (20 : 4 - 2) \cdot 3]\} \cdot 2$

(3p) b) Aflați $2 \cdot x + 3 \cdot y$, știind că x și y verifică egalitățile $(2 \cdot x + 3) \cdot 4 = 36$ și $(20 - y) : 4 + 6 = 10$

Problema 2.

Stabilește regula și continuă șirul :

(2p) a) 11, 13, 15, __, __, __

(2p) b) 650, 540, 430, __, __, __

(3p) c) 1, 2, 3, 5, 8, __, __, __

Problema 3.

(7p) Diferența a două numere este 8500. Dacă împart numărul mai mare la numărul mai mic, obțin câtul 5 și restul 40. Care sunt cele două numere ?

Problema 4.

(7p) Diana cumpără de la piață 5 lăzi a câte 12 kg de mere și 4 lăzi a câte 10 kg de piersici. Dacă un kg de mere costă 4 lei și unul de piersici costă 6 lei, află cât rest primește de la o bancnotă de 500 de lei.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.**Timp de lucru: 2 ore.****Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a IV-a

Problema1.

(4p) a) $20 + [50 + 5 \cdot (10 - 9)] \cdot 2 = 20 + 55 \cdot 2 = 20 + 110 = 130$

b)

(1p) $(2 \cdot x + 3) \cdot 4 = 36; 2 \cdot x + 3 = 9; 2 \cdot x = 6; x = 3$

(1p) $(20 - y): 4 + 6 = 10; (20 - y): 4 = 4; 20 - y = 16; y = 20 - 16; y = 4$

$$(1p) \quad 2 \cdot x + 3 \cdot y = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$$

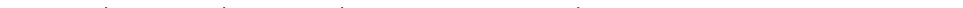
Problema2.

(2p) 17, 19, 21 (numere impare consecutive)

(2p) 320 , 210 , 100 (diferența de 110)

(3p) 13, 21, 34 (fiecare număr începând cu al III- lea se obține din suma ultimilor 2 termeni)

Problema3.

(7p) 



.....(4 p)

|————|

8500

$8500 - 40 = 8460$ (egalarea părților)

(1 p)

$8460 : 4 = 2115$ (numărul mai mic).....

(1 p)

$2115 + 8500 = 10615$ (numărul mai mare)

(1 p)

Problema4.

(3p) Fiecare întrebare corectă.

(3p) Fiecare calcul corect.

(1p) Finalizare R : 20 lei

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ

18.02.2019

Clasa a V-a

Problema 1.

a) Aflați cel mai mic număr de forma $\overline{abcd}$ care verifică simultan condițiile:

(2p) i. Este mai mare decât 1000;

(1p) ii. Cifrele sale sunt pare;

(1p) iii. Suma cifrelor sale este mai mare decât 13.

b) Fie șirul de numere naturale: 1; 7; 2; 14; 3; 21;
Aflați termenii de pe locurile 2018 și 2019.

Problema 2.

Se dau numerele:

$$A = 2019 \cdot 2018 - 2018 \cdot 2017 - 2 \cdot 2017 + 2 \cdot 2016 - 2 \cdot 2015$$

$$B = [3^{121} : 9^{60} + (5^3)^2 : 25^2] : (2^2 \cdot 3^3 : 18 - 1^{2019} - 2019^0)$$

$$C = 1 + 3^{+3} 2^{+3} 3^{+32019} + \dots$$

(4p) a) Stabiliți dacă numărul $A+B$ este sau nu număr prim.

(3p) b) Arătați că numărul $3+2 \cdot C$ nu poate fi pătrat perfect.

Problema 3.

Se consideră numerele naturale nenule $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$.

(4p) a) Arătați că $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_{2018} + a_{2019})(a_{2019} + a_1)$ este un număr par.

(3p) b) Determinați restul împărțirii prin 5 a numărului

$$N = \frac{4(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_{2018} + a_{2019})(a_{2019} + a_1)}{5} - 1$$

Problema 4.

Andrei, Bianca și Cristian merg la piață având 60 lei. Ei cumpără astfel: Andrei, 4kg de cartofi, 3 kg roșii și 1 kg vinete, Bianca, 6 Kg cartofi, 1 kg roșii și 3kg vinete, iar Cristian, 8kg cartofi, 4 kg roșii și 4kg vinete. Bianca plătește cu 6lei mai mult decât Andrei, iar Cristian cu 4 lei mai puțin decât Andrei și Bianca la un loc.

(3p) a) Aflați cât plătește fiecare copil pentru produsele cumpărate.

(4p) b) Aflați cât costă kilogramul din fiecare produs cumpărat.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a V-a

Problema 1.		
(3p)	a)	$\overline{abcd}, a, b, c, d \text{ pare}, a + b + c + d > 13$ $\overline{abcd}$ cel mai mic $\Rightarrow a = 2, b = 0$. Numărul este de forma $\overline{20cd} \Rightarrow$

		$2 + 0 + c + d > 13 \Rightarrow c + d > 11$ Deducem $c = 4, d = 8$ Cel mai mic număr este 2048.
(4p)	b)	$1; 7; 2; 14; 3; 21; 4; 28; 5; 35; 6; 42; \dots$ $1 \cdot 7; 2 \cdot 7; 3 \cdot 7; 4 \cdot 7; 5 \cdot 7; 6 \cdot 7$ II IV VI VIII X XII Pe locul 1 se află ¹ Pe locul 2 se află ^{1 \cdot 7} Pe locul 3 se află ² Pe locul 4 se află ^{2 \cdot 7} Pe locul 5 se află ³ Pe locul 6 se află ^{3 \cdot 7} Pe locul 7 se află ⁴ Pe locul 8 se află ^{4 \cdot 7} . . . Pe locul 2018 se află ^{1009 \cdot 7} = 7063 și pe locul 2019 se află 1010 .

Problema 2.

(4p)	a)	$A = 2018 \cdot (2019 - 2017) - 2 \cdot 2017 + 2 \cdot 2016 - 2 \cdot 2015$ $= 2018 \cdot 2 - 2 \cdot 2017 + 2 \cdot 2016 - 2 \cdot 2015$ $= 2 \cdot (2018 - 2017 + 2016 - 2015) = 2 \cdot 2 = 4$ (1p)
		$B = [3^{121}; (3^2)^{60} + (5^3)^2; (5^2)^2]; (4 \cdot 27; 18 - 1 - 1)$ (1p) $= (3 + 25); 4 = 7$ (1p)
		$A + B = 11$ număr prim (1p)
(3p)	b)	$C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2019}$ $3C = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$ (1p)

		$2C = 3^{2020} - 1$ (1p) $u(3 + 2C) = 3 + u(3^{2020}) - 1 = 3$, deci numărul nu poate fi pătrat perfect(1p)
--	--	--

Problema 3.

(3p)	a)	Presupunem prin reducere la absurd că produsul este impar , ar însemna că fiecare factor este impar , prin urmare, în fiecare paranteză sunt numere de parități diferite, deci se pot forma numai grupe cu numere de parități diferite . Contradicție, deoarece numărul termenilor din șir este 2019 , adică impar .
(4p)	b)	Suma parantezelor este $2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}) = \text{par}$ Produsul parantezelor este un număr par , ultima cifră a puterii $4(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_{2018} + a_{2019})(a_{2019} + a_1)$ este 6 . Astfel N se termină în 5 și de aici concluzia , rest 0.

Problema 4.

(3p)	a)	Andrei : X lei ; Bianca X+6 lei ; Cristian X+X+6-4 =2X+2 $4X+8=60$, $4X=52$, $X=13$ Andrei 13 lei , Bianca 19 lei , Cristian 28 lei
(4p)	b)	4kg cartofi.....3kg roșii.....1kg vinete.....13 lei 6kg cartofi.....1kg roșii.....3kg vinete.....19 lei 8kg cartofi.....4kg roșii.....4kg vinete.....28 lei 10kg cartofi.....4kg roșii.....4kg vinete.....32 lei 1kg cartofi =2lei; 1kg roșii= 1leu; 1kg vinete=2lei

OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ, 18.02.2019
Clasa a VI-a

Problema 1.

Fie numerele naturale A și B, în care :

$$A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8$$

$$B = 51 \cdot 20 + 3 \cdot 170 - 17 \cdot 30$$

- (5p) a) Arătați că B este divizibil cu A;
(2p) b) Determinați ultima cifră a numărului $n = 20^A + 19^B$.

Problema 2.

- (3p) a) Verificați egalitatea : $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n^2+2n}$ pentru $n=12$.
(4p) b) Calculați suma $S = \frac{1}{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2019^2 + 2 \cdot 2019}$

Problema 3.

- (7p) Suplementul unui unghi x și complementul unui unghi y sunt direct proporționale cu numerele 13 și 5, iar suma măsurilor unghiurilor x și y este egală cu un unghi drept. Să se determine măsurile unghiurilor x și y.

Problema 4.

- (7p) În triunghiul ABC cu $AB=AC$, diferența dintre un unghi de la bază și unghiul din vârf este de 36° . Notând cu I intersecția bisectoarei unghiului B cu mediatoarea laturii [AB], să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, știind că $BI=\alpha$ cm și $CI=\beta$ cm.

(Gazeta matematică, 2001)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.



Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VI-a

	Etapele rezolvării	Punctaj
Problema 1.	a) Se calculează $2A - A = 510$	2p
	Calculul numărului $B = 1020$	2p
	Finalizare	1p
	b) $U(20^A) = 0$ și $U(19^B) = 1 \Rightarrow U(n) = 1$	2p
Problema 2.	a) Înlocuirea corectă a lui n cu 12	1p
	Verificarea relației date	2p
	b) Utilizarea relației de la punctul a) pentru $n = 3, \dots, n = 2019$	2p
	Reducerea termenilor și finalizare	2p
Problema 3.	Scrierea relației de proporționalitate : $\frac{180 - x}{13} = \frac{90 - y}{5} = k$	2p
	$x + y = 90^\circ$	1p
	Determinarea lui $k = 10$	2p
	Aflarea valorii lui $x = 50^\circ$	1p
	Aflarea valorii lui $y = 40^\circ$	1p
Problema 4.	Din $AB = AC \Rightarrow m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle A) + 36^\circ$	
	Dar $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ$	1p
	Se deduce $m(\sphericalangle A) = 36^\circ$	1p
	Din IO-mediatoare a laturii $AB \Rightarrow AI = BI \Rightarrow AI = \alpha \text{ cm}$	1p
	$AC = AB = (\alpha + \beta) \text{ cm}$	1p

Din $m(\sphericalangle BCI) = m(\sphericalangle CIB) = 72^\circ \Rightarrow \triangle BCI$ isoscel $\Rightarrow BI = BC = \alpha$ 2p

Deci, $P \triangle_{ABC} = AB + BC + CA = (\alpha + \beta) + \alpha + (\alpha + \beta) = 3\alpha + 2\beta$ (cm)

1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ

18.02.2019

Clasa a VII-a

Problema 1.

(7p) Fie $a = 2 + 4 + 6 + \dots + 4038$, $b = 2019 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2019}\right)$.

Calculați $\sqrt{a - 2019b}$.

Problema 2.

(7p) Să se arate că numărul $\alpha = \sqrt{\frac{5n^2 + 5n - 3}{5n + 7}} \notin \mathbb{Q}$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$.

Problema 3.

(7p) Fie triunghiul ABC dreptunghic isoscel ($AB = AC$), $D \in (BC)$, astfel încât AD să fie înălțime. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în punctul F. Demonstrați că $BA + AF = BC$.

Problema 4.

(7p) Fie două triunghiuri dreptunghice, $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$ și $\triangle ABE$ cu $m(\sphericalangle E) = 90^\circ$, C și E de aceeași parte a dreptei AB . Se construiesc perpendicularele $CD \perp AE, E \in (AD)$ și $CF \perp BE, F \in (BE)$.

(4p) a) Arătați că $BF = \frac{AD \cdot BC}{AC}$.

(3p) b) Demonstrați că $\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AB}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VII-a

Problema 1.

$$(7p) \quad a = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2019) = 2 \cdot 2020 \cdot 2019 : 2 = 2019 \cdot 2020 \quad (2p)$$

$$b = 2019 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2018}{2019} \right) = 1 \quad (3p)$$

$$\text{Finalizare} \quad \sqrt{a - 2019b} = \sqrt{2019 \cdot 2020 - 2019} = 2019 \quad (2p)$$

Problema 2.

$$(7p) \quad 5n^2 + 5n - 3 = 5n(n + 1) - 3$$

$$n(n + 1) = 2k \Rightarrow 10k \Rightarrow u.c. (5n(n + 1)) = 0 \Rightarrow u.c. (5n^2 + 5n - 3) = 7$$

$$5n^2 + 5n - 3 \text{ nu este pătrat perfect.} \quad (2p)$$

$$u.c. (5n + 7) = \{2; 7\} \Rightarrow \text{nu este pătrat perfect} \quad (2p)$$

$$\text{Verificăm dacă există } n \in \mathbb{N} \text{ pentru care fracția să fie reductibilă.} \quad (1p)$$

$$\text{Presupunem că } (\exists) d \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \begin{cases} d | 5n^2 + 5n - 3 \\ d | 5n + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d \mid 5n^2 + 5n - 3 \\ d \mid 5n + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \mid 5n^2 + 5n - 3 \\ d \mid 5n^2 + 7n \end{cases} \Leftrightarrow d \mid 2n + 3$$

$$\begin{cases} d \mid 2n + 3 \\ d \mid 5n + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \mid 10n + 15 \\ d \mid 10n + 14 \end{cases} \Leftrightarrow d \mid 1 \Leftrightarrow (5n^2 + 5n - 3; 5n + 7) = 1 \Leftrightarrow \frac{5n^2 + 5n - 3}{5n + 7} \text{ ireductibilă } (2p)$$

Problema3.

(7p) Fie $E \in (BC)$, astfel încât $AB=BE$ (desen corect) (2p)

$$\triangle ACE \equiv \triangle BAF \text{ (U.L.U)} \Rightarrow AF = CE \quad (4p)$$

$$\text{Finalizare } BA+AF=BE+EC=BC . \quad (1p)$$

Problema4.

(4p) a) Notam $AC \cap BE = \{ M \} \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \angle C \equiv \angle E (=90^\circ) \\ \angle BMC \equiv \angle AME \text{ (op.la.vf) } \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle AME \Leftrightarrow \angle FBC \equiv \angle EAC \quad (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle F \equiv \angle E (=90^\circ) \\ \angle MBC \equiv \angle MAE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle AEM \Leftrightarrow \frac{BC}{AM} = \frac{BF}{AE} \Leftrightarrow BF = \frac{AE \cdot BC}{AM} \quad (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle E \equiv \angle D (=90^\circ) \\ \angle DAC \text{ comun} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEM \sim \triangle ADC \Leftrightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow AE = \frac{AD \cdot AM}{AC} \quad (1p)$$

$$BF = \frac{AE \cdot BC}{AM} = \frac{\frac{AD \cdot AM}{AC} \cdot BC}{AM} = \frac{AD \cdot BC}{AC} \quad (1p)$$

(3p) b) $BE = BF + FE = BF + CD = \frac{AD \cdot BC}{AC} + CD$ (CDEF dreptunghi) (2p)

$$\Leftrightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{AD \cdot BC}{AC \cdot AB} + \frac{CD}{AB} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} \quad (1p)$$



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18.02.2019
Clasa a VIII-a

Problema 1.

(7p) Să se determine mulțimea :

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3n+1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Problema 2.

(7p) Dacă $x - 3y + 1 = 0$ și $x \in [-1, 2]$.

Să se arate că $\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5} = \sqrt{10}$.

Problema 3.

Se consideră pătratul ABCD cu $AC \cap BD = \{O\}$, unde M este mijlocul lui [AD]. Pe planul pătratului se ridică perpendicularele AE și BF astfel încât $AB = BF = 2 \cdot AE = 6\text{cm}$.

- (3p) a) Să se demonstreze că $(CDF) \parallel (EOM)$.
- (4p) b) Calculați distanța dintre planele (CDF) și (EOM).

Problema 4.

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic în care $BA' = 3\sqrt{17}\text{ cm}$, $BC' = 4\sqrt{10}\text{ cm}$ și $A'C = 13\text{ cm}$.

- (2p) a) Să se afle dimensiunile paralelipipedului
- (2p) b) Aflați distanța de la punctul C la planul (ABD') .
- (3p) c) Dacă $\angle BB' \in BB'$, să se afle distanța segmentului MB astfel încât $AM + MC'$ să fie minimă.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**CLASA a VIII-a****Problema 1.**

(1p) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = |\sqrt{3} + 2|$

(1p) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

(1p) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = |\sqrt{2}-3|$

(1p) Mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{5}{3n+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

(1p) Determină $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3n+1$ să fie divizor al lui 5.

(2p) Finalizare $A = \{-2; 0\}$.

Problema 2.

(3p) $x \in [-1, 2] \Rightarrow x+1 \in [0, 3] \Rightarrow 3y \in [0, 3] \Rightarrow y \in [0, 1]$

(4p) Din $x = 3y - 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{(3y-1)^2 + y^2 + 2(3y-1) + 1} + \sqrt{(3y-1)^2 + y^2 - 4(3y-1) - 2y + 5} =$$

$$\frac{\sqrt{10y^2} + \sqrt{10y^2 - 20y + 10}}{\sqrt{10}} = |y|\sqrt{10} + |y-1|\sqrt{10} = y\sqrt{10} + (1-y)\sqrt{10} =$$

Problema 3.

(2p) a) Se consideră un cub ABCDGFHI ca o extindere a figurii obținute cu datele problemei. $EM \parallel (CDF)$, $MO \parallel (CDF)$

(1p) Finalizare

(2p) b) $(CDF) \parallel (EOM) \Rightarrow d[(CDF), (EOM)] = |d_1 - d_2|$, unde $d_1 = d[B, (FDC)]$ și

$$d_2 = d[A, (EOM)].$$

(2p) Finalizare $d = d_1 - d_2 = 1,5\sqrt{2}$

Problema 4.

(2p) a) Notăm $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c \Rightarrow a^2 + c^2 = (3\sqrt{17})^2$, $a^2 + c^2 = 153$, $b^2 + c^2 = 160$, $a^2 + b^2 + c^2 = 169$.

Obținem $a = 3$, $b = 4$, $c = 12$

(2p) b) $AB \parallel C'D' \Rightarrow (ABD') = (ABC'D') ; D'C' \perp (BCC')$

Fie $CE \perp BC'$, $E \in (BC')$, $CE \subset (BCC') \Rightarrow D'C' \perp CE$.

$$\left. \begin{array}{l} CE \perp BC' \\ CE \perp C'D' \\ BC' \cap C'D' = \{C'\} \end{array} \right\} \Rightarrow CE \perp (ABC'D') \Rightarrow d(C, (ABD')) = CE \Rightarrow$$

$$CE = \frac{4 \cdot 12}{4\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

(3p) c) Desfășurarea laterală a paralelipipedului .

Pentru ca suma $AM + MC'$ să fie minimă trebuie ca A, M, C' să fie coliniare .

În triunghiul ACC' , $MB \parallel CC'$ (rezulta din T.F.A) $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{CC'} \Rightarrow MB = \frac{36}{7}$.