

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - SĂLAJ -11.02.2023

BAREM DE NOTARE

Clasa a VII-a

Subiectul 1

- a) Demonstrați că $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}, \forall n, k \in \mathbb{N}$.
- b) Se dau numerele $a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30}$ și
 $b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018$.

Calculați partea întreagă a numărului $\sqrt{15 \cdot a + \frac{b}{1002}}$.

Soluție și barem de corectare

a) Calcul direct

.....2p

b) $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{30}$1p

$a = \frac{7}{15}$1p

$b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018 = (10018 + 3) \cdot [(10018 - 3) : 5 + 1] =$

$= 10021 \cdot 1002$1p

$\sqrt{15 \cdot a + \frac{b}{1002}} = \sqrt{15 \cdot \frac{7}{15} + \frac{10021 \cdot 1002}{1002}} = \sqrt{10028}$1p

$[\sqrt{10028}] = 100$1p

Subiectul 2

(3p) a) Calculați media geometrică a numerelor:

$$a = |\sqrt{7} - 3| + \frac{2}{3 - \sqrt{7}} + 12 \text{ și } b = |2 - \sqrt{5}| - \frac{4}{3 - \sqrt{5}} + 13$$

a) Soluție și barem de corectare

$a=18$ 1p

$b=8$ 1p

$m_g = \sqrt{a \cdot b} = 12$1p

b) Folosind inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică, demonstrați că

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{4046 \cdot 4047}}{8093} < 2023.$$

Soluție și barem de corectare

$$a) m_g \leq m_a \Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{N}, \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n \cdot (n+1)} < \frac{n+n+1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n \cdot (n+1)}}{n+n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{2+3} + \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{3+4} + \dots + \frac{\sqrt{4046 \cdot 2047}}{4046+4047} < \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{\text{de 4046 ori}} = 2023 \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 3

Fie $ABCD$ paralelogram, $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ astfel încât $[AM] \equiv [NC]$ și O centrul paralelogramului.

a) Demonstrați că punctele M, O, N sunt coliniare.

b) Dacă aria paralelogramului $ABCD$ este 24 cm^2 și $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, aflați aria triunghiului NOC .

Soluție și barem de corectare

a) Cum $[AM] \equiv [NC]$ și $AM \parallel NC$, reiese că $AMCN$ este paralelogram, deci mijlocul diagonalei $[AC]$, O , este și mijlocul lui $[MN]$2p

Punctele M, O și N sunt coliniare.....1p

b) În paralelogramul $AMNC$, $\Delta NOC \equiv \Delta AOM$, cu ariile egale cu $\frac{1}{4}$ din aria paralelogramului (O este și mijlocul lui $[AC]$, $A_{\Delta NOC} = A_{\Delta COM} = \frac{1}{2} A_{\Delta MCN}$, iar $\Delta MCN \equiv \Delta AMN$).....2p

Raportul ariilor paralelogramelor $ABCD$, $AMCN$ este $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ 1p

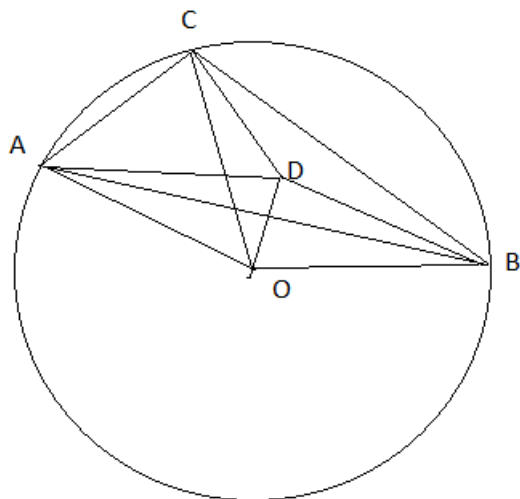
Aria ΔNOC este $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ din aria lui $ABCD$. Deci $A_{\Delta NOC} = 2 \text{ cm}^2$ 1p

Subiectul 4

Considerăm un triunghi ABC cu $\sphericalangle ACB = 100^\circ$, $\sphericalangle CAB = 50^\circ$ și punctul D din interiorul triunghiului cu proprietatea $DA = DB$ și $\sphericalangle DBC = 20^\circ$. Arătați că punctul D este simetricul centrului cercului circumscris ΔABC față de AB și determinați măsura unghiului $\sphericalangle DCB$.

Problema propusă din Supliment Gazeta Matematică, nr 12/2022

Soluție și barem de corectare



Desen.....1p

$\angle DBA = 10^\circ$, $\triangle DAB$ isoscel $\Rightarrow \angle ADB = 160^\circ$1p

$\angle ACB = 100^\circ \Rightarrow \text{arcul } \widehat{AB} = 200^\circ \Rightarrow \text{arcul } \widehat{ACB} = 160^\circ \Rightarrow \angle AOB = 160^\circ$1p

$OA = OB = R \Rightarrow \triangle OAB$ isoscel și $\triangle DAB \equiv \triangle OAB \Rightarrow OADB$ romb

Deci diag sunt perpendiculare și se înjum. $\Rightarrow AB$ mediatoarea segm $OD \Rightarrow D$ este simetricul lui O față de AB1p

$\triangle OAC$ isoscel cu $\angle AOC = \text{arcul } \widehat{AC} = 2 \cdot \angle ABC = 60^\circ$, deci $\triangle OAC$ echilateral.....1p

$AD = AO = AC \Rightarrow \triangle ACD$ isoscel cu $\angle CAD = 40^\circ \Rightarrow \angle ACD = 70^\circ$1p

$\Rightarrow \angle DCB = 100^\circ - 70^\circ = 30^\circ$1p

Total 7p