

## Barem de corectare OLM 2017 Clasa a XI-a

1. Explicația faptului că pentru  $a < 1$  sau pentru  $a > 1$  egalitatea nu este posibilă ..... (2p)

În mod necesar  $a = 1$  ..... (1p)

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{bx-1}{x^2+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{bx^2}{x^2+1}} = e^b \quad \dots\dots\dots (3p)$$

Concluzie  $a = 1, b = -3$  ..... (1p)

2. Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este șirul al cărei limită se cere, se observă că  $\frac{\sum_{k=0}^{2n} k \cdot C_{2n}^k}{n \cdot 4^{n+1} + 4n + 1} \leq x_n \leq \frac{\sum_{k=0}^{2n} k \cdot C_{2n}^k}{n \cdot 4^{n+1} + 1}$  ..... (2p)

$$\sum_{k=0}^{2n} k \cdot C_{2n}^k = 2n \cdot \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{2n} \cdot C_{2n}^k = 2n \sum_{k=1}^{2n} C_{2n-1}^{k-1} = 2n \cdot 2^{2n-1} = n \cdot 4^n \quad \dots\dots\dots (3p)$$

$a_n = \frac{n \cdot 4^n}{n \cdot 4^{n+1} + 4n + 1} \leq x_n \leq \frac{n \cdot 4^n}{n \cdot 4^{n+1} + 1} = b_n$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{4}$ , aplicând teorema clește-  
lui, se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{4}$  ..... (2p)

3. a)  $f(x) = \det(A + xB), \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \det A + a \cdot x + b \cdot x^2 + \det B \cdot x^3, a, b \in \mathbb{Z}$  ..... (1p)

$$S = f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i) = 4\det A + a(1-1+i-i) + b(1+1-1-1) + \det B(1-1-i+i) = 4\det A$$

..... (2p)

b) Elementele lui  $A$  fiind impare  $\Rightarrow 4 \mid \det A$  ..... (1p)

$\det(A) \in [-6, 6] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow$  valoarea minimă posibilă pentru  $\det A$  este  $-4$  ..... (1p)

Se obține  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  pentru care  $\det(A) = -4$  și  $S_{\min} = -16$  ..... (2p)

4. a)  $f(f(X)) = (X^*)^*$ ;  $X^* \cdot X = X \cdot X^* = \det X \cdot I_n$  ..... (1p)

$$\det X^* \cdot \det X = (\det X)^n \Rightarrow \det X^* = (\det X)^{n-1} \quad \dots\dots\dots (1p)$$

$$(X^*)^* \cdot X^* = X^* \cdot (X^*)^* = \det(X^*) \cdot I_n = (\det X)^{n-1} \cdot I_n$$

$$\Rightarrow (X^*)^* \cdot X^* \cdot X = (\det X)^{n-1} \cdot X \text{ și astfel } f(f(X)) = (X^*)^* = (\det X)^{n-2} \cdot X \quad \dots\dots\dots (1p)$$

b) Pentru  $Y \in M$  căutăm unica matrice  $X \in M$  astfel încât  $f(X) = Y$  ..... (1p)

$$f(f(X)) = f(Y) \Rightarrow (\det X)^{n-2} \cdot X = f(Y); \text{ dar } X^* = Y \Rightarrow \det X^* = \det Y \text{ și se obține}$$

$$(\det X)^{n-1} = \det Y \quad \dots\dots\dots (2p)$$

Deoarece  $n$  este impar și ecuația  $t^{n-1} = \det Y$  are soluția reală unică  $t = \sqrt[n-1]{\det Y}$ , se obține  
 unica matrice  $X = \frac{1}{\left(\sqrt[n-1]{\det Y}\right)^{n-2}} \cdot Y^*$ . Folosind faptul că  $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} \cdot A^*, \forall \lambda \in R$  se verifică

existența lui  $X$ . Avem:

$$X^* = \left( \frac{1}{\sqrt[n-1]{(\det Y)^{n-2}}} \cdot Y^* \right)^* = \left( \frac{1}{\sqrt[n-1]{(\det(Y))^{n-2}}} \right)^{n-1} \cdot (Y^*)^* = \frac{1}{(\det Y)^{n-2}} \cdot (\det Y)^{n-2} \cdot Y = Y \quad \dots \textbf{(1p)}$$