Olimpiada de matematică – clasa a IX-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SOLUŢII

1. Un număr întreg K de trei cifre este pătratul unui număr întreg k. Dacă schimbăm ordinea ultimelor două cifre ale lui K, se obţine pătratul numărului $k+1$. Determinaţi numărul k.

Rezolvare

$K=\overline{abc}=100a+10b+c=k^2$ şi $100a+10c+b=(k+1)^2$.

Scăzând cele două relaţii se obţine $9(c-b)=2k+1 \Rightarrow c-b$ număr impar.

$(k+1)^2$ este un număr de trei cifre

$\Rightarrow 10 \le k+1 \le 31 \Rightarrow 19 \le 2k+1=9(c-b) \le 61 \Rightarrow 3 \le c-b \le 6$.

Rezultă $c-b \in \{3,5\}$.

Pentru $c-b=3 \Rightarrow k=13 \Rightarrow K=169$.

Pentru $c-b=5 \Rightarrow k=22 \Rightarrow K=484$, dar $(k+1)^2=23^2 \ne 448$.

2. Ecuaţia $x^2-x+a=0$ are rădăcinile reale x_1, x_2. Dacă $|x_1^2-x_2^2|=1$, arătaţi că $|x_1^n-x_2^n|=1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare

$x_1+x_2=1 \Rightarrow |x_1-x_2|=1 \Rightarrow x_1-x_2 \in \{-1,1\}$.

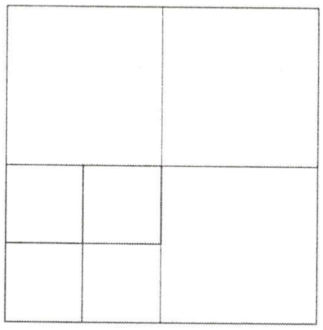
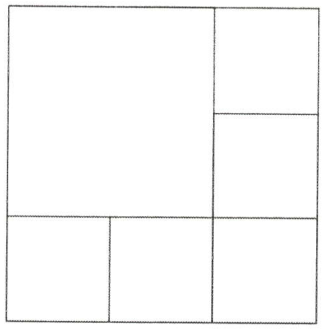
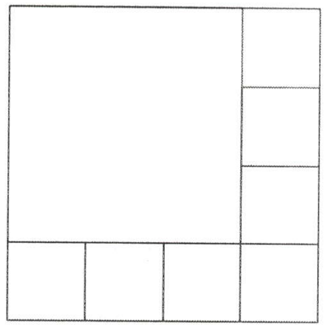
Rezolvând sistemele $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=1 \end{cases}$ respectiv $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=-1 \end{cases}$ se obţine

$(x_1, x_2) \in \{(0,1),(1,0)\} \Rightarrow (x_1^n, x_2^n) \in \{(0,1),(1,0)\}$ deci $|x_1^n-x_2^n|=1$.

3. Arătaţi că orice pătrat se poate tăia în alte $n \in \mathbb{N}$ pătrate, dacă $n \ge 6$.

Rezolvare

Pentru $n=6,7,8$ avem descompunerea în imagine

Împărţind un pătrat în patru pătrate, numărul acestora creşte cu 3. Deci dacă putem descompune în n pătrate, atunci o putem descompune şi în $n+3$.

4. În patrulaterul $ABCD$ avem $AB \nparallel CD$. Fie punctele $M \in [AD]$ şi $N \in [BC]$ astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{AB}{CD}$. Arătaţi că dreapta MN este paralelă cu bisectoarea unghiului interior al dreptelor AB şi CD.

Rezolvare

Dacă $AB = a$ şi $CD = b$, având în vedere că $a \cdot \overrightarrow{MD} + b \cdot \overrightarrow{MA} = a \cdot \overrightarrow{CN} + b \cdot \overrightarrow{BN} = \vec{0}$ se obţine
$\overrightarrow{MN} = \frac{a \cdot \overrightarrow{MN} + b \cdot \overrightarrow{MN}}{a+b} = \frac{a \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) + b \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})}{a+b} = \frac{a \cdot \overrightarrow{DC} + b \cdot \overrightarrow{AB}}{a+b}$.

Dacă din punctul $\{O\} = AB \cap DC$ construim câte un reprezentant al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$, aceştia fiind $\overrightarrow{OE}$ şi $\overrightarrow{OF}$, atunci pentru bisectoarea OL al triunghiului OEF avem $\overrightarrow{OL} = \frac{a \cdot \overrightarrow{DC} + b \cdot \overrightarrow{AB}}{a+b}$.

Rezultă $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OL}$, deci MN paralel cu OL.