

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a VIII-a

1. Demonstrați că numărul $A = 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 + 1$ este pătrat perfect.

Supliment, G.M., decembrie 2013

Soluție:

Fie $2012 = x$ 1p

Avem $A = (x-1)x(x+1)(x+2) + 1$ 2p

$$A = (x^2 + x - 2)(x^2 + x) + 1 = (x^2 + x + 1)^2$$
 4 p

2. În tetraedrul $ABCD$ cu toate muchiile congruente, fie $DO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Punctul M este proiecția punctului O pe muchia $[DB]$ și $MC = 2\sqrt{7}$ cm. Calculați valoarea sinusului unghiului dintre dreapta MC și planul (BOD) .

Testarea Națională, 2007

Soluție:

Fie $AB = l$.

$$BO = \frac{l\sqrt{3}}{3} \text{ și din teorema catetei în triunghiul } DOB \text{ obținem } BM = \frac{l}{3}$$
 1p

$$\text{Fie } CS \perp BD, S \in (BD). \text{ Obținem } CS = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ și } SM = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$$
 2p

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul SMC , aflăm $l = 6$ 1 p

$$BO \cap AC = \{T\} \Rightarrow m(\sphericalangle CM; (BOD)) = m(\sphericalangle CMT)$$
 2p

$$\text{În triunghiul dreptunghic } CMT, \sin(\sphericalangle CMT) = \frac{TC}{CM} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$
 1p

3. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, punctul M este mijlocul $[CC']$, S mijlocul $[BM]$, T mijlocul $[AS]$ și $\{P\} = A'T \cap (ABC)$. Dacă $AB = 4$ cm, atunci determinați lungimea segmentului $[PT]$.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

E mijlocul $[B'C']$ și F mijlocul segmentului $[BC] \Rightarrow AP \cap BC = \{F\}$

$$\text{Dacă } A'T \cap EF = \{G\} \Rightarrow \frac{A'P}{PG} = \frac{AP}{FP} = \frac{AA'}{FG} \text{ și } \frac{AA'}{SG} = \frac{A'T}{TG} = \frac{AT}{TS} = 1 \quad 2p$$

Deci $A'T = TG$, $[SF]$ linie mijlocie în $\triangle BCM$ și $A'A = SG = 4$ cm 2p
 $\Rightarrow FG = 3$ cm

Din teorema lui Pitagora în triunghiul $A'EG$ obținem $A'G = \sqrt{69}$ cm. 1p

$$\text{Din } \frac{A'P}{PG} = \frac{AA'}{FG} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{69}}{PG} = \frac{7}{3} \Rightarrow PG = \frac{3\sqrt{69}}{7} \text{ cm.} \quad 2p$$

$$\text{Obținem } PT = \frac{\sqrt{69}}{14} \text{ cm}$$

4. Arătați că nu există două numere prime astfel încât suma cuburilor lor să fie egală cu cubul mediei lor aritmetice.

Ionuț Mazalu, Brăila

Soluție:

Presupunem că există a, b numere prime astfel încât:

$$a^3 + b^3 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \quad 1p$$

$$7 \cdot (a^2 + b^2) = 10ab \Rightarrow a = 7 \text{ sau } b = 7 \quad 3p$$

$$a = 7 \Rightarrow (b-5)^2 + 24 = 0 \text{ (fals)}; b = 7 \Rightarrow (a-5)^2 + 24 = 0 \text{ (fals)} \quad 3p$$