INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa IX-a, științe ale naturii

SUBIECTUL I

Se consideră numerele reale $x,\ y \geq 1$

a) Arătați că $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy$.

selectată de prof. Tuduce Florian (C.N.S) din culegere de probleme

Barem de corectare

a) $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x \geq 2\sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad x-1+2\sqrt{x-1}+1 \geq 0$ 2 puncte

$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 \geq 0$ este adevărat pentru orice $x \geq 1$ 2 puncte

b) $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy \quad \Big| : xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq 1$ 2 puncte

utilizând a) avem: $\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 1 punct

SUBIECTUL II

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}$. Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$ este o progresie geometrică.

Se calculează raportul $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ …………..............…………4p.

După efectuarea calculelor avem

$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$ ……………………………………………….............……………3p.

SUBIECTUL III

Să se demonstreze ca pentru orice n $\in N^*$ are loc egalitatea:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1};$$

Propusă de prof. Pacurar Sorina, sursa: manual matematica clasa IX-a

Barem de corectare

Demonstram prin inductie matematica P(n) adevarata $\forall n \in N^*$

Etapa de verificareP(1): $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ ……………………………………………….………………………1p

Etapa de demonstratieP(k)→P(k+1) , $\forall k \in 1$
…………………….…………………………….………………….…….1p

Pentru scrierea lui P(k) …………………………….…………………………………….2p

Pentr uscrierea lui P(k+1) ……………………………………………………………………2p

Finalizare ……………………………………………………..… 1p

SUBIECTUL IV

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$.

Propusă de prof. Adonia Opriş

Barem de corectare

Notăm $\frac{15x-7}{5}=t \Rightarrow x=\frac{5t+7}{15}$ 1p

Deci $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\left[\frac{30t+117}{120}\right]$ 1p

$\left[\frac{30t+117}{120}\right]=t \Leftrightarrow t \le \frac{30t+117}{120} < t+1$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Rezolvând obținem $\frac{-1}{30} < t < \frac{117}{90}$ 2p

Cum $t \in Z$ obținem $t_1 = 0$ şi $t_2 = 1$ 1p

Deci $x_1 = \frac{-7}{15}$ şi $x_2 = \frac{4}{5}$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa X-a, ştiințe ale naturii

SUBIECTUL I

Să se calculeze suma numerelor x, y şi z dacă

$$x = \lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \ldots + \lg\frac{99}{100}, \qquad y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}},$$

$$z = \lg(tg1^\circ) + \lg(tg2^\circ) + \ldots + \lg(tg89^\circ)$$

selectat de prof. Tuduce Florian (C.N.S.) din culegere de probleme

Barem de corectare

$$x = \lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right) = \lg\frac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2$$ 2 puncte

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$$ 2 puncte
$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{99} - \sqrt{98} + \sqrt{100} - \sqrt{99} = -1 + 10 = 9$$

$$z = \lg(tg1^\circ \cdot tg89^\circ) + \lg(tg2^\circ \cdot tg88^\circ) + \ldots + \lg(tg44^\circ \cdot tg46^\circ) + \lg(tg45^\circ) =$$
$$= \lg(tg1^\circ \cdot ctg1^\circ) + \lg(tg2^\circ \cdot ctg2^\circ) + \ldots + \lg(tg44^\circ \cdot ctg44^\circ) + \lg(tg45^\circ) =$$
$$= \underbrace{\lg 1 + \lg 1 + \ldots + \lg 1}_{45 ori} = 45 \cdot 0 = 0$$ 2 puncte

Deci $x + y + z = -2 + 9 + 0 = 7$ 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SUBIECTUL II

Rezolvați ecuația $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$

Propusă de prof. Crişan Teodor

Observăm că $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})(\sqrt{5-2\sqrt{6}}) = 1$ …………..…………………………………..1p

Notăm $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x = y \Rightarrow (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = \frac{1}{y}$ ………………………………………....2p

Obținem ecuația $y^2 - 10y + 1 = 0$ …………………………………………………..1p

cu soluțiile $y_1 = 5-2\sqrt{6} = (5+2\sqrt{6})^{-1}$

$y_2 = 5+2\sqrt{6}$ ………………………………………………………….2p

Revenind la substituție

$(5+2\sqrt{6})^x = (5+2\sqrt{6})^{-1}$ de unde $x_1 = -2$

$(5+2\sqrt{6})^x = 5+2\sqrt{6}$ de unde $x_2 = 2$ ……………………………………………1p

SUBIECTUL III

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1$. Să se arate că: $Re\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right) = 0, (z_1 \neq z_2)$.

selectată de către prof. Alexuțan Klara din ***Marius Burtea, Georgeta Burtea,*** *Matematică - manual pentru clasa a X-a, Editura Carminis*

Barem de corectare

Folosim că $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}$ ……………………………………………………………………………….**(1p)**

şi $\bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow |z| = 1$ ………………………………………………………………………………………………**(1p)**

$Re\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right) = \frac{\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} + \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)}}{2} = \frac{\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} + \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}}{2} = \frac{\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} + \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}}}{2} = 0$ ……………………………………………………**(5p)**

SUBIECTUL IV

Demonstrați că expresia $E = x^{\log_a \frac{y}{z}} \cdot y^{\log_a \frac{z}{x}} \cdot z^{\log_a \frac{x}{y}}$ este constantă pentru toate valorile admisibile ale lui a, x, y, z .

selectată de către prof. Cezaria Conț din Culegere de probleme pentru liceu. Algebra clasele IX-XII (Editie 2009), Năstăsescu, Niță

Barem de corectare

Logaritmăm expresia în baza a……………………………… …………….. (1p)

Obținem $\log_a E = \log_a \frac{y}{z} \log_a x + \log_a \frac{z}{x} \log_a y + \log_a \frac{x}{y} \log_a z$ .... (2p)

$\log_a E = \log_a x \log_a y - \log_a z \log_a x + \log_a y \log_a z - \log_a x \log_a y + \log_a z \log_a x - \log_a y \log_a z$ ....(3p)

$\log_a E = 0 \Rightarrow E = 1$ constantă... (1p)

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa XI-a, ştiințe ale naturii

SUBIECTUL I

Fie matricea . $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

a) Să se arate că pentru orice $n\geq 1$ avem $A^{n+2}=5A^{n+1}+2A^{n}$

b) Să se calculeze $\det(A^5)$

propusă de prof. Crişan Teodor

Barem de corectare

a)Din relatia Hamilton-Cayley

$A^2-Tr(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2$ obtinem 1p

$A^2=5A+2I_2$, deci 1p

$A^{n+2}=5A^{n+1}+2A^{n}$, relație care se poate demonstra şi prin inducție.......................................2p

b) $\det A^5=\det^5 A=(-2)^5=-32$ 3p

SUBIECTUL II

Fie $A(3,2), B(1,1), C(\alpha,4), D(5,\beta),\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

a) Să se determine numerele reale a, b astfel încât punctele A, B să aparțină dreptei de ecuație d: $x+ay+b=0$.

b) Să sedetermine valorile lui $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 5.

c) Să se determine valorile lui $\beta\in\mathbf{R}$ astfel încât punctele A, B, D să fie coliniare.

selectat de prof. Jecan Ioan (C.N.S.) din Probleme date la C.M. „Haimovici”, jud. Maramureş

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Barem de corectare

a) $A, B \in d \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 1+a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$ 2 puncte

b) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 4 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 7$ 2 puncte

$\frac{1}{2}|\alpha-7| = 5 \Leftrightarrow |\alpha - 7| = 10 \Leftrightarrow \alpha \in \{-3, 17\}$ 1 punct

c) A, B, D coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6-2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 3$ 2 puncte

SUBIECTUL III

a) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$

b) Pentru ce valori reale ale lui *a* și *b* $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$

selectată de către prof. Matyas Mirel de la C.T. ”Al.Papiu Ilarian” Zalău

Barem de corectare

a)

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} =$ 1p

$\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} =$ 1p

$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}$ 1p

b) Dacă $a \le 0$, atunci $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\infty$. 1p

c) Deci trebuie ca $a > 0$.

Avem $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-a^2x^2-b^2-2abx}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b} =$ 1p

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-a^2)-x(1+2ab)+1-b^2}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)} = 0$ 1p

de aici rezultă $\begin{cases} 1-a^2=0 \\ 1+2ab=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SUBIECTUL IV

Calculaţi limitele a) $l = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2+x-6}$

b) $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x+\ldots+2013^x-2012}{x}$

selectată de prof. Driha Ioan din Culegere de exerciţii şi probleme, M. Burtea, G. Burtea, 2010

Barem de corectare

a) $l = \lim\limits_{X\to 2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x+3)(\sqrt{x+2}+2)}$, ...2 p

$l = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2-4}{(x-2)(x+3)(\sqrt{x+2}+2)}$,..1 p

$l = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(X+3)(\sqrt{x+2}+2)} = \dfrac{1}{20}$ 1p

b) $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1+3^x-1+\ldots+2013^x-1}{x}$, …………………..1 p

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x} +\ldots+ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-1}{x}$, ……………………1 p

ln2 + ln3 + … + ln2013 = ln2·3·…·2013 = ln2013!,……………………1 p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa XII-a, științe ale naturii

SUBIECTUL I

Se consider matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\{X(a)=I_2+aA \mid a\in R\setminus\{-1\}\}$. Arătați că

a) G este parte stabilă a lui $M_2(R)$ față de înmulțirea matricelor.

b) $(G,\cdot)$ este grup abelian

c) Există $b\in R$ astfel încât $X(1)\cdot X(2)\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot X(2013)=X(b-1)$

Barem de corectare

a)Verificarea faptului că dacă $X(a), X(b)\in G \Rightarrow X(a)\cdot X(b)\in G$ 1p

b) câte 1 p pentru fiecare axiomă a grupului.................................3p

c) se foloseşte punctul a)................................3p

SUBIECTUL II

Calculați a) $\int x\cdot arctgx dx$, $x\in R$ b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$, $x\in(0,\infty)$

Propusă de prof. Pavăl Floare

Barem de corectare

a) Folosim metoda integrării prin părți…………………...........……………………..2p

Găsirea integralei

$I=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+\varphi$ ……………….............……………………………1p

b)Folosim metodata schimbării de variabilă…..……….............……………………2p

Gasirea integralei $I=\frac{3}{4}(1+lnx)-\sqrt[3]{1+lnx}+\varphi$ ……………………….……1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SUBIECTUL III

Fie legea de compoziție „$\circ$” definită pe $\mathbf{R}$ prin $x \circ y = xy - x - y + 2, \forall\, x, y \in \mathbf{R}$.
Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{de\ 10\ ori} = 1025$.

selectată de prof. Fărcaş Nicolae (C.N.S) din culegere de probleme

Barem de corectare

Avem: $x \circ y = x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$
respectiv $x \circ x = (x-1)^2 + 1$ 2 puncte

Se arată prin inducție că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{de\ n\ ori} = (x-1)^n + 1$ 3 puncte

$\Rightarrow \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{de\ 10\ ori} = (x-1)^{10} + 1$, atunci avem ecuația:

$(x-1)^{10} + 1 = 1025 \Rightarrow (x-1)^{10} = 1024 \Rightarrow (x-1)^{10} = 2^{10} \Leftrightarrow$
$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$ sau $x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$ 2 puncte

SUBIECTUL IV

Să se determine primitivele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$

selectată de către prof. matyas Mirel din Manual pentru clasa a XII-a, Marius Burtea, Georgeta Burtea

Barem de corectare

avem $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.....3p

$f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1} = \frac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2-x+1} = x^2 + x + 1$...3p

$\int f(x)dx = \int (x^2 + x + 1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$...1p