OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală

22 februarie 2014

CLASA a XII-a

1.Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in Z, m \text{ și } n \text{ impare} \right\}$și $G = Q_0 \times Z$. Pe G definim legea de compoziție $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2), (\forall) q_1, q_2 \in Q_0, (\forall) k_1, k_2 \in Z$ .Să se arate că funcția $f: G \to Q^*, f\big((q, k)\big) = q.2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(Q^*,\cdot)$.

O.L.Caraș-Severin , 2013

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup și $H = \{x \in G | x^2 = e\}$. Mulțimea H este subgrup al lui G ? Justificați răspunsul .

Manual clasa a-XII-a

3.Funcția $f: R \to (0, \infty)$ este dublu derivabilă cu $f(0) = f'(0) = 1$ și $f(x)f''(x) + \big(f'(x)\big)^2 = 1 - sinx$, $(\forall) x \in R$ .Arătați că pentru orice $x \in R$:

a) $x^2 + 2sinx + 1 > 0$

b) $f(x)f'(x) = x + cosx$ și $f(x) = \sqrt{x^2 + 2sinx + 1}$.

Adrian Boțan , Botoșani (GMB 10/2013)

4. Se consideră funcția continuă $f: [0,1] \to [a, b], a > 0$ astfel încât $\int_0^1 f(x)\, dx \geq k > 0$. Demonstrați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{a+b-k}{ab}$.

O.L.Sibiu , 2013

Toate subiectele sunt obligatorii .

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .

Timp de lucru 3 ore .