OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

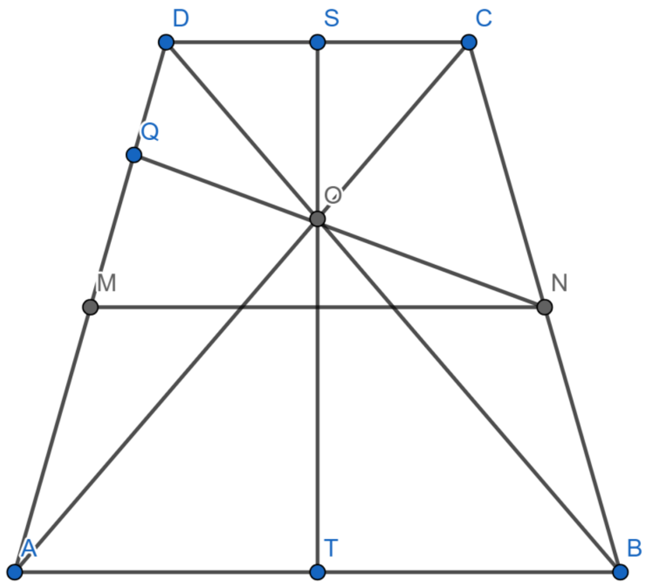
ETAPA LOCALĂ-VRANCEA,

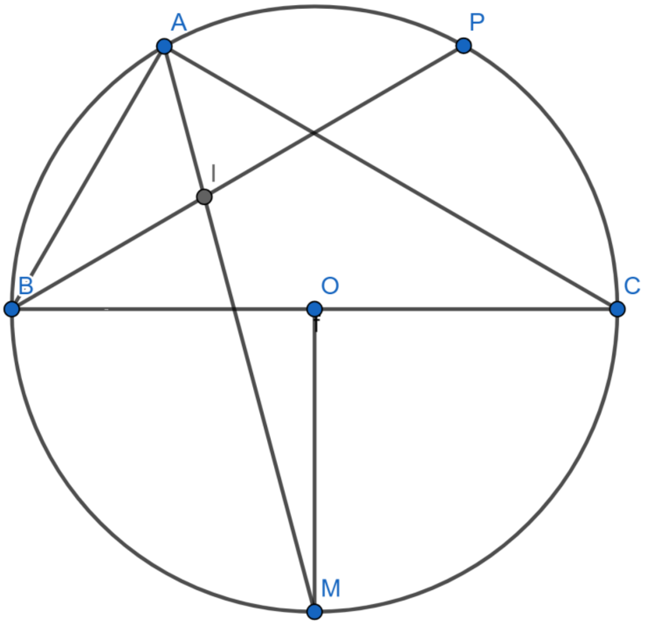
08.02.2020

CLASA A VII-A

Barem de corectare şi de notare

Problema	Rezolvare	Punctaj
1. a)	Deoarece $b,c\in\{-1,1\}$ vom avea $b^2c^2=1$, deci $ac=1$, ceea ce înseamnă că a = c = 1 sau a = c = -1.	1p
	Atunci $\|a+b-c\|=\|b\|=1$	1p
	Iar $\|ab+bc+ca-1\|=\|ab+bc\|=\|ab+ba\|=\|2ab\|=2$	1p
b).	Deoarece $a=c$, relația devine $\|ax+b\|+\|bx+a\|+\|ax+a\|=\|x+1\|$ sau $\|ax+b\|+\|bx+a\|+\|a(x+1)\|=\|x+1\|$, dar avem egalitatea $\|a(x+1)\|=\|a\|\|x+1\|=\|x+1\|$ și atunci relația devine $\|ax+b\|+\|bx+a\|=0$ și avem de analizat două cazuri: Caz 1. a = b, atunci avem $2\|ax+a\|=0$ de unde $\|x+1\|=0$, Deci x = -1. Caz 2. a = -b, atunci avem $\|ax-a\|+\|-ax+a\|=0$ relație care devine $2\|x-1\|=0$, de unde x = 1.	2p 1p 1p
2. a).	$a=\sqrt5\sqrt5+2\sqrt5-2\sqrt5-2\cdot2+\sqrt6\sqrt6-2\sqrt6+2\sqrt6-2\cdot2-3=11-11=0$ $b=\sqrt3+\frac{\sqrt6}{\sqrt2}+\frac{\sqrt6}{\sqrt3}-\frac{4\sqrt6}{2\sqrt2}+\frac{4\sqrt6}{2\sqrt3}-3\sqrt2=$ $\sqrt3+\sqrt3+\sqrt2-2\sqrt3+2\sqrt2-3\sqrt2=0$	1p 1p
b).	Se observă că perechea (0,0) verifică relația Dacă presupunem că $b\neq0$, atunci avem $\frac{a^2}{b^2}=2$, de unde $\frac{a}{b}=\pm\sqrt2$, egalitatea imposibilă deoarece $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$ în timp ce $\sqrt2$ și $-\sqrt2$ sunt iraționale.	1p 2p
c).	Din relația de la punctul b) vom deduce : $\sqrt{(x-1)^2}-2=0$ și $(y+1)^2-9=0$. Prima egalitate este echivalentă cu $\|x-1\|=2$ de unde x -1=2 sau x -1 = -2, deci $x\in\{-1,3\}$. A doua egalitate este echivalentă cu $\|y+1\|=3$ de unde y +1 = 3 sau y +1 = -3, deci $y\in\{-4,2\}$.	1p 1p

3.		
a).	Patrulaterul $MSNT$ este romb deoarece este un paralelogram cu două laturi alăturate congruente. Avem $NT \parallel AC$ și $NT = \frac{1}{2}AC$, deoarece NT este linie mijlocie în $\triangle ABC$. Analog $MS \parallel AC$ și $MS = \frac{1}{2}AC$, deoarece MS linie mijlocie în $\triangle ADC$, deci $MSNT$ este paralelogram. În același mod segmentele TM și NS sunt congruente și paralele. Avem și $MT \parallel BD$ și $NT \parallel AC$, dar $AC \perp BD$, deci $MT \perp NT$. În concluzie $MSNT$ este pătrat, are diagonalele egale $MN = ST$.	2p 1p
b).	Vom exprima aria pătratului în două moduri: $A_{MSNT} = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{MN \cdot ST}{2} = \frac{MN^2}{2}$, fiind patrulater ortodiagonal. $A_{MSNT} = l^2$, dar latura pătratului $l = NT = \frac{AC}{2}$ $A_{MSNT} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$. Din cele două relații avem că $AC^2 = 2MN^2$	1p 1p
c).	$NO \cap AD = \{Q\}$ În triunghiul dreptughic BOC avem $m(\sphericalangle OBC) + m(\sphericalangle OCB) = 90^0$. Triunghiul NOB este isoscel deoarece $ON = NB = \frac{BC}{2}$, ON mediană în triunghi dreptunghic. Deci $m(\sphericalangle OBC) = m(\sphericalangle NOB) = m(\sphericalangle DOQ)$ iar $m(\sphericalangle OCB) = m(\sphericalangle ODQ)$ (trapez isoscel). În concluzie avem 90^0 = m $(\sphericalangle OBC)$ + m $(\sphericalangle OCB)$ = $m(\sphericalangle DOQ) + m(\sphericalangle ODQ)$, de unde rezultă $m(\sphericalangle OQD) = 90^0$	2p

4.		
a).	Deoarece $BC=2r$, înseamnă că BC este diametru, deci $m(\measuredangle BAC)=90^0$, iar dacă $AB=\frac{BC}{2}$, înseamnă că $m(\sphericalangle ACB)=30^0$, de unde $m(\sphericalangle ABC)=60^0$ .Rezultă că triunghiul *ABO* este echilateral, iar triunghiul *OAM* este isoscel *OA* = *OM* = *r*. Atunci unghiul la centru $\sphericalangle AOM$ are măsura $60^0+90^0=150^0$, deci $m(\measuredangle AMO)=\frac{30^0}{2}=15^0$	3p
b).	$AB=OP=r$, triunghiul *POC* este echilateral, deci $m(\sphericalangle ABO)=m(\sphericalangle POC)=60^0$ De unde avem că $AB \parallel PO$, deci *ABOP* este paralelogram. Avem și *AB* = *BO*, deci *ABOP* este romb.	2p
c).	*M* este mijlocul arcului BC, deci *AM* este bisectoarea $\sphericalangle BAC$, $m(\sphericalangle ABP)=m(\sphericalangle PBC)=30^0$ deci și *BP* este și bisectoare. Rezultă de aici că *CI* este bisectoare.	2p