



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa a XI-a

Problema 1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $t \in [0; 2\pi)$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Să se calculeze A^n și B^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, astfel încât $AB - BA = A$. Să se arate că matricea A nu este inversabilă.

Problema 3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = (0; 1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, $\forall n \geq 1$. Admitem cunoscută inegalitatea $2^x < x + 1$, $\forall x \in (0; 1)$.

Să se calculeze: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n) - 1}{a_n}$.

Gazeta matematică - prelucrare

Problema 4. Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = f(5x + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notă: Timpul de lucru este de 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.