

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ**2017. január 28.****X. OSZTÁLY****1.)** Igazold, hogy

$$\log_{2016} \sqrt[2017]{1 + \frac{a_2}{a_1}} + \log_{2016} \sqrt[2017]{1 + \frac{a_3}{a_2}} + \dots + \log_{2016} \sqrt[2017]{1 + \frac{a_1}{a_{2017}}} \geq \frac{1}{5 + \log_2 63}$$

bármilyen $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ szigorúan pozitív valós számok esetén! Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

2.) Legyen $a \in \mathbb{C}$ és $z = \frac{a+i}{a-1+2i}$.**a)** Határozd meg az $M = \{a \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{R}\}$ halmazt!**b)** Határozd meg az $a \in M$ komplex számokat, amelyekre $|a| = \sqrt{5}$.**3.)** Adottak a z_1, z_2, z_3 különböző komplex számok, amelyekre $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ és

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1.$$

a) Bizonyítsd be, hogy z_1, z_2, z_3 egy derékszögű háromszög csúcsainak affixumai, és kettő közülük ellentétes számok!**b)** Számítsd ki a $z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_3^{2017}$ összeget!**4.)** Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2[x]$ függvény, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.**a)** Igazold, hogy az f függvény bijektív!**b)** Határozd meg az $f \circ f$ függvényt!**Megjegyzés:****Minden feladat kötelező.****Minden feladat 10 pontot ér.****Munkaidő 3 óra.**