OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019

CLASA a IX-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația

$$\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=a$$

are soluție. Notația $\{t\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real t.

2. Se consideră un patrulater convex $ABCD$, O intersecția diagonalelor sale, un număr real $a>0$ și punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $Q\in(DA)$ astfel încât

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{DQ}{QA}=a.$$

a) Arătați că, dacă $a=1$, atunci $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$.

b) Arătați că, dacă $a\neq 1$ și $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

3. a)Determinați numărul tripletelor (a,b,c) de numere naturale, cu $0\leq a<b<c\leq 100$ și a,b,c în progresie aritmetică.

b) Trei termeni a,b,c (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii geometrice sunt numere naturale și au suma număr par. Demonstrați că numerele a,b și c sunt pare.

4. Pentru x număr real definim $a_1(x)=|x-1|$ și $a_{n+1}(x)=|a_n(x)-1|$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Arătați că, pentru orice număr real x, mulțimea $\{a_n(x)\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ este finită.

b) Determinați numărul soluțiilor ecuației $a_{2019}(x)=1$.